Syntaxe géométrique de la physique : démêlage linguistique préalable.

1. Prérequis généraux.

1.1. Définition d'un "modèle".

Un système A, est dit modèle d'un système B, si en regardant A au lieu de B, je peux répondre aux questions que je me pose sur B.

Il en résulte que la qualification de **A** comme modèle, dépend de l'ensemble des questions que je me pose sur **B**. Plus je me pose de questions, plus je serai exigeant sur le choix du modèle.

Il est clair, que substituer au système **B**, un modèle, n'a d'intérêt, que si on y trouve un vrai avantage. Par exemple, ce sera parce que c'est moins cher, ou plus rapide, ou plus accessible, ou moins dangereux. Etc.

1.2. Analogie.

Pour l'**analogie**, on n'est pas exigeant. On se contente de remarquer qu'il y a eu des situations où **A** ressemblait à **B**. Et comme on connaît **A** bien mieux que **B**, on s'habitue à en pifométrer l'extrapolation *au chic* : entre **A**, et **B** qu'on distingue encore mal, la ressemblance est présumée s'étendre sans limites.

Facile, et instinctive, l'analogie est indispensable dans de nombreux cas, pour chercher à connaître et à comprendre. Elle est aussi trompeuse, et très dangereuse : on oublie trop souvent de vérifier ses limitations. Il faut savoir dépasser le temps du flou heuristique. Se permettre l'analogie, impose de vérifier après, si elle était valide. Se permettre la paresse de négliger cette vérification, c'est prendre le risque de pratiquer l'imposture.

L'outil mathématique, comme analogie de la réalité physique, est trop rarement suspecté, très peu questionné, et bien mal traité. Notamment, trop de physiciens ont abusé des vecteurs comme analogies non vérifiées. Et presque personne n'osa rectifier. Trop longtemps, les auteurs de manuels s'autorisèrent à changer subrepticement de définition des vecteurs, toutes les trois pages, sans que personne osât broncher.

2. Démêlage linguistique : qui a besoin de quel concept ?

2.1. Les signes comme moteur ? Les significations comme freins ? Ou l'inverse ?

Actuellement, les mathématiciens vivent sur une *success-story* usée : celle du développement historique de l'algèbre, par le dynamisme des symboles, malgré les réticences de ceux qui répugnaient à donner une signification aux nombres négatifs, et *a fortiori* aux nombres complexes. De nos jours, ils abusent à fond de l'autonomie des signes, et du jonglage avec les signes, en refusant obstinément de s'intéresser à la syntaxe et à l'algèbre des significations. Le balancier est bloqué à fond du côté du dernier succès reconnu.

Or l'expérience prouve que les significations pratiques, et la syntaxe des significations, sont choses trop sérieuses pour qu'on les abandonne aux seuls praticiens. Certains - trop - s'y enferment n'importe comment, *marquent le territoire à l'instinct*, et stérilisent le métier pendant des générations. Je m'attacherai donc à restaurer une dialectique saine et complète entre le jeu des signes et le jeu des significations et des applications, et entre **tous** les métiers intervenants. La dialectique entre les intervenants est condition indispensable à toute politique de qualité, et elle doit être largement garantie, avant même que d'être rationalisée.

2.2. Collisions inévitables, collisions évitables.

Les possibilités du cerveau humain ont depuis longtemps dépassé les possibilités de la phonétique. La première conséquence a nargué les linguistes : les collisions phonétiques. La seconde conséquence nous nargue tous les jours dans notre métier de professeurs : les entassements et collisions de concepts sous un même mot.

2.2.1. Collisions phonétiques.

Tous les jours, le linguiste rencontre des homonymes exacts pour des concepts presque confondus, dans des langues éloignées, sans aucun contact entre elles depuis très longtemps, parfois plusieurs dizaines de milliers d'années, par exemple entre l'hébreu et une langue andine. Pendant longtemps, les malheureux linguistes se sont escrimés à proposer des explications, en forme de migrations préhistoriques à travers les océans... Jusqu'à ce qu'on s'aperçoive que le nombre des phonèmes articulables par l'espèce humaine est limité, que chaque peuplade n'en emploie nécessairement qu'un sous-ensemble réduit, et que le nombre de mots, phonétiquement praticables, de peu de syllabes, qu'on peut former à partir de ces phonèmes, n'est pas bien grand. Que donc ces collisions sont statistiquement bien prévisibles, et que dans bien des cas, il n'y a strictement rien à interpréter.

2.2.2. Entassements de concepts sous un même morphème.

Les morphèmes existant dans notre langue, sont en nombre réduit, quelques dizaines de milliers, et chacun d'entre nous n'en maîtrise qu'une toute petite minorité. La création de néologismes est un art peu et mal pratiqué. La réactivation de mots corrects, mais tombés en désuétude, est un art presque inconnu, et qui se heurte à des tabous, à des haines et des mépris difficiles à justifier.

Or, le besoin en concepts est quotidiennement énorme. Tous les jours, la réalité nous force à en créer, ou recréer faute de savoir que la création avait déjà été faite ailleurs. Il n'est pas rare de rencontrer une quinzaine de significations entassées sous un seul morphème (morphème : la forme extérieure du mot, le fait d'être composé de telles lettres, à prononcer de telle façon).

Statistiquement, les collisions sémantiques, sont un événement très fréquent, beaucoup plus fréquentes qu'elles ne le seraient si nous étions moins paresseux, plus attentifs, et plus compétents.

Aussi, nos élèves butent tous les jours sur les polysémies bizarres que nous leur transmettons sans y réfléchir : un même mot véhicule de nombreuses significations d'un jour à l'autre, d'un lieu à l'autre, dont personne ne les a avertis. Personne n'a crié gare au changement de contexte, de tradition locale, d'idiome local à une profession ou à une école de pensée. Chaque groupuscule, chaque despote local, a des prétentions à considérer le restant de l'espèce comme autant de sous-hommes, contre lesquels l'arme de son incivisme serait légitime, et imbu de sa *juste* idiosyncrasie, s'arroge le privilège d'ignorer les collisions sémantiques avec les autres professions utilisatrices des mêmes mots.

2.3. La polysémie de "vecteur" : quatre ou cinq usages. Ou huit ?

2.3.1. Les prolégomènes oubliés.

Bien qu'on définisse les *espaces vectoriels abstraits* assez tard dans les études, au début des études supérieures, nos bambins manipulent dès l'école primaire, dès le CE2 pour être précis, des membres d'*espaces vectoriels* de dimension 1 : **les grandeurs concrètes, et les grandeurs physiques** (autres que vectorielles, ni tensorielles). Puis, l'enseignement secondaire étant disloqué entre spécialités étrangères les unes aux autres, nos potaches oublient tout, aux mains de matheux purs, qui n'entendent rien à la physique. Ils s'installent alors durablement dans la confusion entre nombres et grandeurs.

Nous allons avoir besoin de caractériser ces grandeurs pratiques et concrètes d'une part (par exemple 500 flacons d'un médicament), et ces grandeurs physiques d'autre part, par leur lien avec une grandeur unité, et avec l'ensemble des nombres réels. Nous allons donc définir les **grandeurs scalables**. Nous aurons aussi besoin de distinguer entre les **grandeurs arbitrairement scalables**, et les **grandeurs nombrables**, pour lesquelles existe une unité absolue définie par la nature, et non par une société humaine.

2.3.1.1. **Grandeurs scalables**.

Par définition, on peut les rapporter à une unité : elles sont le produit d'une grandeur-unité par un nombre réel.

Par conséquent, si l'on change l'unité de mesure d'une grandeur scalable, le quotient de cette grandeur (par exemple un prix) par son unité est **contravariant à cette unité**. Dans les classes primaires, ce nombre quotient est désigné comme "*le nombre exprimant la mesure de ...*", ce qui est trop lourd. Dans les espaces de dimension supérieure à 1, chacun de ces quotients, serait désigné comme "*composante*", ce qui ici, serait prématuré. Il faut trouver mieux pour ce stade. Je suggère : "**multiplicateur**", ou "**quotiende**".

Exemples : On peut s'acquitter d'une dette de mille francs, avec deux billets de 500 F, ou vingt billets de 50 F. On peut expédier 60 tonnes de marchandises, par 3 camions de 20 tonnes, ou par 2 camions de 30 tonnes. Cette page mesure en large 21 cm, ou 210 mm, ou 0,21 m. 21 cm = 0,21 m : le quotiende est contravariant. Quand l'unité est 100 fois plus grande, alors le quotiende est 100 fois plus petit. Autrement dit, les quotiendes varient **au contraire de l'unité de base**, afin d'avoir compétence à désigner la même grandeur.

Schéma : **Grandeur scalable = quotiende × grandeur-unité.**

Et si l'unité est composée ? Si l'essence est à 5,60 F le litre, et que le dollar est à 5,60 F, alors l'essence est à 1$ le litre : contravariance. Mais elle est à 3,785 $ par gallon, ou encore à 21,20 F par gallon, puisqu'un gallon vaut 3.785 litres : **covariance**. Ce prix par unité de volume, varie **comme l'unité de volume.**

Le nombre qui exprime ce prix de l'essence, est covariant à l'unité de capacité : il grandit ou rapetisse comme elle. Ce nombre est contravariant à l'unité monétaire : il grandit ou rapetisse à l'envers de l'unité monétaire. Bizarrement, ces mots de covariance et de contravariance, n'étaient entendus qu'en fin d'études supérieures, alors que les phénomènes désignés, sont rencontrés dès les classes primaires. Rencontrés, mais ignorés dès le passage dans l'enseignement secondaire. C'est une lacune regrettable, car les notions de variance sont le coeur même de la mesure et de la physique. Cette syntaxe des unités physiques, a presque toujours été sous-estimée[1]. Les mathématiciens n'ont jamais daigné s'y intéresser, et trop de physiciens sont trop inadvertants pour en tirer toutes les conséquences.

2.3.1.2. **Grandeurs arbitrairement scalables**.

C'est *a priori* le cas de la plupart des grandeurs de la physique, comme la longueur. Dans le domaine macroscopique, il n'y avait aucune raison de choisir le mètre-étalon de cette longueur plutôt que d'une autre (rappelons-nous le pied de Charlemagne). Pourtant, en physique quantique, on a envie depuis longtemps, de définir une *longueur élémentaire*, ou de rapporter toutes les longueurs à la constante de Rydberg. Mais cela ne permettra jamais de définir toutes les longueurs comme des multiples exacts de ladite constante de Rydberg, ni même d'une hypothétique *longueur élémentaire*.

Paradoxalement, il est possible de définir de façon intrinsèque l'inverse d'une grandeur arbitrairement scalable. Notre seul postulat est de disposer d'un protocole de comparaison, permettant de conclure à l'égalité de deux échantillons d'une grandeur physique, ou à une inégalité dans tel rapport. Supposons un tel résultat : A = B. Il devient alors non-absurde de réécrire ce résultat : A/B = 1, et même $1/B = A^{-1}$. Evidemment, le quotiende de A^{-1} sur l'unité-inverse, est aussi arbitraire que le quotiende de A sur l'unité directe, mais leur produit (quotiende × unité) est bien une grandeur physique invariante envers l'unité de mesure. Il est à remarquer que nous n'avons pas eu besoin de disposer d'un protocole de mesure sur l'espace des grandeurs inverses.

Vérifions que ceci est bien invariant envers les unités. Une longueur **a** vaut 2 mètres, ou 200 cm. Son inverse $\mathbf{a^{-1}}$ vaudra 0,5 m^{-1}. Ou 0,005 cm^{-1}. Son quotiende est bien contravariant à l'unité inverse, ou covariant à l'unité directe. L'invariance de $\mathbf{a^{-1}}$ est bien assurée.

En poursuivant ce raisonnement, nous voyons que nous n'aboutissons à aucune contradiction algébrique, à définir toutes les puissances entières relatives d'une grandeur scalable, et de ses unités de mesure possibles. $A . A^{-1}. = 1$ permet de conclure que : $A . A . A^{-1}. = A$, ou : $A^2 . A^{-1}. = A$.

[1] connue pourtant depuis le 17e siècle, par Marin Mersenne (1588 - 1648), qui l'a utilisée avec succès.

2.3.1.3. **Grandeurs nombrables : scalables par une constante universelle**.

En physique, on rencontre dans cette classe des grandeurs nombrables :

la charge électrique, que l'on rapporte à la charge élémentaire de l'électron ou du proton (on peut descendre si l'on y tient, à la charge élémentaire d'un quark).

Le moment angulaire intrinsèque, qui est toujours multiple demi-entier de h.

L'action maupertuisienne, qui est toujours multiple entier de ***h***.

Le flux magnétique dans un supraconducteur, multiple de ***h/2q***.

Contre-exemples : La masse atomique d'un noyau ou d'un atome ne ressemble qu'approximativement à une grandeur nombrable. Elle serait nombrable sans le défaut de masse, reponsable de la stabilité du noyau. Ce n'est qu'une grandeur indiçable, à deux indices, sur les numéro atomique Z et nombre total de nucléons A. Toutes les vitesses de groupe, qui sont inférieures à la célérité limite de propagation de l'énergie dans le vide **c**.

Il va de soi qu'outre l'unité naturelle, on peut toujours définir des unités arbitraires, pour la commodité. Pour la charge électrique, les électriciens préfèrent le coulomb à la charge élémentaire, trop petite pour leurs gestes de métier. Pour les flacons de médicament, l'usine livre aux grossistes par unités insécables de plusieurs flacons, peut-être 24. Il y aura peut-être une période de jonction où cohabiteront deux emballages différents, et deux unités de facturation différentes : par 24 flacons, ou par 30. Une commande de 2400 flacons, sera satisfaite aussi bien par 100 cartons de 24, que par 80 cartons de 30. Telle est la vie pratique. Les notions de covariance et de contravariance continuent de s'appliquer aux grandeurs nombrables : elles restent scalables.

2.3.2. Les usages à délimitation immédiatement correcte.

2.3.2.1. En premier, depuis des millénaires, nous rencontrons l'usage littéral : **est vecteur ce qui véhicule quelque chose**. Une flèche incendiaire tirée depuis un arc à corde très lâche, fut un vecteur de combustion, capable de provoquer un incendie dans les fortifications en bois de l'adversaire. Au 18e siècle, les colporteurs furent les vecteurs des pamphlets révolutionnaires. Certaines fusées sont des vecteurs nucléaires. Le moustique est le vecteur de la fièvre jaune et du paludisme.

Rappel de vocabulaire : Le mot "vector" était déjà pris depuis plus de 42 siècles, avant d'être réutilisé en 1837 par W. R. Hamilton (1805 - 1865), à l'usage des mathématiciens et des physiciens. Dans le dictionnaire de latin, on trouve une famille de plus de 100 termes autour du verbe "*vehere*", des noms "*vector*" (au sens de chariot, puis d'animal bâté ou de trait, de cavalier ou de passager d'un navire), et "*veha*" (voie). En français, nous avons gardé : véhicule, voie, dévier, convecteur, vexer, convexe, vétérinaire. La famille est également riche dans les langues germaniques : Weg, thalweg, Norvège, Solveig, tramway, wagon, vaguemestre.

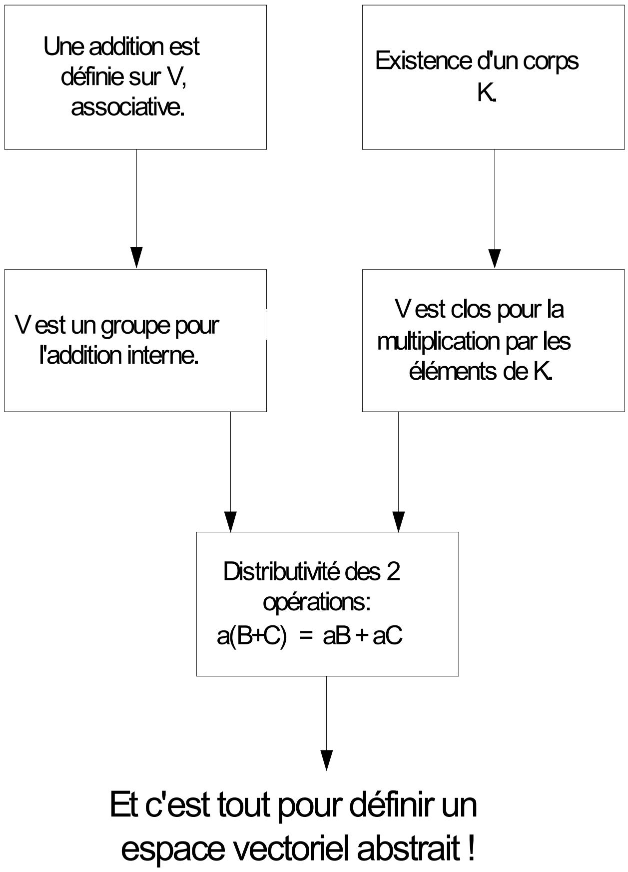
2.3.2.2. En second, nous rencontrons sa mathématisation immédiate (mais correcte), pour les besoins de la physique macroscopique : **est vecteur ce qui caractérise une translation**. Ce cahier des charges est rempli par la définition de Bellavitis : les vecteurs comme classes d'équivalences des bipoints par la relation d'équipollence. La sémantique précédente est donc conservée, dans ses grandes lignes, mais connaît une schématisation. Du point de vue mathématique, et dans le langage axiomatique que nous devons aux écoles de Klein et de Hilbert, nous avons besoin des axiomes des espaces vectoriels, plus une métrique, plus le moyen de définir une translation. Ce qui implique que l'espace en question soit au moins approximable localement par un espace affine pseudo-euclidien tangent. Du point de vue pratique, cela signifie que l'on peut valablement dessiner, et se servir de ses mains, d'une règle, d'un compas, d'une équerre, ou de ses pas, ou de ses outils d'atelier, pour se guider dans les raisonnements.

Par extension légitime, est aussi considéré comme vecteur, tout ce qui dérive du vecteur de translation, par une dérivation ou intégration selon une variable qui n'est pas d'espace (le temps, notamment), ou par multiplication par une grandeur, dont la dimension physique ne comprend aucune longueur, à quelque puissance que ce soit.

2.3.2.3. En troisième lieu, nous rencontrons **les éléments de tout espace vectoriel abstrait**, quel qu'en soit la signification, ou le vide de sens, avec ou sans métrique.

En algèbre, on ne demande à un espace vectoriel abstrait, que d'être un groupe commutatif pour une opération, usuellement notée "+", et d'être stable pour une opération externe, appelée multiplication par les éléments d'un certain corps K, auquel aucune autre particularité n'est demandée que d'être un corps algébrique.

Toutefois, cela implique des propriétés, comme celles des projections sur des sous-espaces vectoriels, l'existence de bases, de la décomposition unique sur une base, et **des lois de changement des composantes selon les changements de base**, afin de conserver invariante une éventuelle signification. Très simples, ces lois n'ont été énoncées et comprises que très tard, et restent encore lettre morte pour la majorité des enseignants concernés. Nous suggérons de désigner par le terme "*vectoroïdes*" les éléments d'un espace vectoriel abstrait.



2.3.3. Les usages confus, à démêler.

2.3.3.1. **Trois sans lois**. C'est l'état sauvage et archaïque du second concept, venant du 19e siècle qui ne pratiquait que des composantes cartésiennes, et se méfiait de toute démarche géométrique intrinsèque. Par paresse mathématique, on ("*on*" : disciples maxwelliens, Heaviside) a édicté que tout ce qui n'est pas vecteur, et qui n'est pas vraiment nombre, est quand même vecteur. Notamment les rotations infinitésimales.

On s'est donc dispensé de toute espèce de définition qui soit mathématique - car quelle qu'elle soit, on la viole constamment (à chaque "*produit vectoriel*", notamment). On se contente d'avoir ***un usage***, qui est en usage dans la peuplade. Pour eux, il suffit d'avoir une liste de nombres, appelées composantes, sans aucune loi de changement de base, car on ne veut pas savoir changer de base. On tient bien à l'addition des vecteurs, et à la multiplication par un scalaire, mais on en refuse les conséquences inévitables, et se dispense des contraintes qui en découlent. On se permet le plus souvent d'être incohérent avec l'opération de projection sur un sous-espace vectoriel, et *a fortiori*, avec l'immersion dans un espace de dimension supérieure. Il arrive même qu'on se dispense de toute homogénéité dimensionnelle entre lesdites composantes.

Dans la suite, nous désignerons ce concept "**laxeur**", car il est caractérisé par son laxisme.

Techniquement, c'est un record, plus ou moins hétérogène. Sémantiquement, son intention est tantôt de désigner un vrai vecteur, tantôt le record homogène compacté d'un tenseur d'un ordre non précisé (souvent un tenseur antisymétrique de rang 2), plus rarement un record hétérogène, représentant par exemple les trois constantes de l'équation d'une droite du plan : aX + bY + c = 0, voire quelque chose d'encore plus hétérogène.

2.3.3.2. **N'importe quelle liste de nombres**, Cet usage se rencontre en mécanique quantique : un *vecteur d'état*. On l'a aussi rencontré parfois en micro-informatique, où un *vecteur* n'était autre qu'un pointeur, vers une routine vitale, comme la routine d'initialisation à l'allumage, ou celle d'erreur mortelle.

Cette fois, il n'est même plus question d'addition ni de multiplication : une liste, rien d'autre.

On peut rencontrer des cas logiquement différents : la liste chaînée, de longueur *a priori* inconnue, le record structuré, mais dont la structure est mystérieusement connue et attendue, par des moyens externes, et la suite, indexée sur un ensemble dénombrable. Les espaces de Banach reposent sur de telles suites, indexées sur un ensemble dénombrable, ou non.

2.3.3.3. **N'importe quelle liste de nombres, structurée : ce qu'on appelle en informatique un RECORD.**

Certains peuvent bien être, simple question de hasard, des composantes de vecteurs, d'autres sont des indicateurs booléens, ou des numéros d'un type logique énuméré, des numéros de méthode pour le programme qui va utiliser et interpréter ce RECORD. D'autres champs du RECORD peuvent être occupés par tout autre chose que des nombres.

Simplement, dans un RECORD, il ne faut pas s'attendre à ce que la méthode d'utilisation des champs successifs, soit uniforme. Soit que chaque nature et chaque méthode est convenue d'avance, soit que chaque champ porte un drapeau qui signale sa nature, et le type de méthode qui sera compétent.

La sémantique diffère, donc la méthode de conception du programme, donc aussi la méthode de test, et le jeu de test seront qualitativement différents. Et en pédagogie, la stratégie didactique comme les méthodes pédagogiques seront nécessairement distinctes, selon le type logique des champs du RECORD.

Par exemple, je peux très bien considérer 4,5 $m.s^{-1}$ comme un RECORD, composé d'un nombre "4,5", d'un exposant implicite "1" sur l'unité physique "mètre", d'un exposant "-1" sur l'unité physique "seconde", et d'exposants implicites "0" sur les autres unités fondamentales du système d'unité alors en usage. C'est du ressort de ma liberté individuelle. Toutefois, si je vous prétendais que ceci est un vecteur, de dimension au moins 3, vous me traiteriez immédiatement de farfelu, et vous auriez raison. Or, ce n'est pas plus ni moins farfelu que de traiter les 9 composantes d'un tenseur antisymétrique de rang 2, de "*vecteur*" en dimension 3... Là tout s'est passé comme si, en traitement algébrique de la géométrie, on n'avait pas encore conquis le chiffre **zéro**. Comme si, trois composantes nulles - dans certains repères privilégiés seulement - c'était comme **rien**, ce qui autoriserait à un traitement elliptique et obscur. Depuis 152 ans, nous n'osons torcher une "*Quick and Dirty Physics*", vite et mal torchée, où l'on confond analogie avec modèle, nombre avec grandeur physique, etc...

2.3.3.4. **Les prévecteurs : complexes et hypercomplexes.**

Qu'ils soient de dimension 2, 4, ou 8 sur le corps des réels, les nombres complexes, les quaternions, et les octaves de Cayley, ont une propriété en commun : tout changement d'unité ou de base est incongru et impossible. On est totalement prisonniers de la définition algébrique, avec un élément neutre de l'addition, qui est zéro, que l'on ne peut translater nulle part ailleurs. Et avec un élément neutre de la multiplication, qui est 1, que l'on ne peut multiplier par rien d'autre, sauf à ce qu'il ne soit plus élément neutre. En revanche, les prévecteurs forment toujours un ensemble clos, envers l'addition et envers la multiplication par un nombre, ou par un prévecteur.

2.3.3.5. **Collision sémantique à résoudre : scalaire**

Cette notion de "scalaire", peu définie, ou tacitement non-définie, enjambe la confusion entre nombres et grandeurs. Elle a un pied de chaque côté. D'où d'autres solides confusions. Il faut trancher.

Pour les mathématiciens qui définissent des espaces vectoriels abstraits, le "*scalaire*" est un élément du corps (le plus souvent commutatif) sur lequel on peut pratiquer des multiplications externes. Le "*scalaire*" n'est donc qu'un nombre (entiers, réels, complexes, ou hypercomplexes, n'importe pas ici), ou un substitut de nombre, par exemple un membre d'un corps fini.

Pour les physiciens, est "*scalaire*" une grandeur qui n'est pas vectorielle, ni tensorielle, ni tensorielle-déguisée-en-vecteur-de-fiction. Or ces acceptions sont incompatibles, et quelqu'un doit renoncer à son acception. Après avoir expérimenté les deux actions possibles, je constate bien moins coûteux d'interdire "scalaire" dans l'acception "membre d'un corps" (car les mathématiciens ne manquent pas de substituts), que d'obliger les physiciens à adopter un néologisme. Nous préciserons donc ultérieurement notre définition : **est scalaire, une grandeur physique scalable, qui par projection dans l'espace accessible, n'a qu'un seul degré de liberté**. Définition entièrement relative à la dimension de l'espace accessible. Il s'est révélé impossible de maintenir aucune espèce de définition absolue. Dans un espace de dimension 1, le quotient de deux vecteurs est un scalaire; c'est faux en dimension 2 et au delà. Dans un espace de dimension 2, le quotient de deux tourneurs est un scalaire; c'est faux en dimension 3 et au delà. Dans un espace de dimension 3, le quotient de deux capacités est un scalaire; c'est faux en dimension 4 et au delà.

2.3.4. Synthèse de l'inventaire des significations de tous les "*vecteurs*" prétendus.

	Vecteur qui véhicule.	Vrai vecteur géométrique et physique.	Elément d'espace vectoriel abstrait.	Trois sans lois.	N'importe quelle liste de nombres.
Nature des composants, ou "champs".		Grandeurs physiques homogènes	Nombres, ou non précisé.	Grandeurs physiques.	N'importe quoi.
Sémantique	Transport, comme sur un chariot.	Caractériser une translation.	Néant	Contradictoire	Néant
Addition, × par scalaire		OK	OK	OK	Néant
Algèbre : règle de covariance		OK	OK	Astuces d'évitement de l'obstacle	Néant
Cohérence avec sous-espaces, et sur-espaces		OK	OK	Refusé	Néant
Symétries géométriques		OK	OK	Contradictoire	Néant
Métrique		OK	Ajoutable	Contradictoire	
Physique : règles dimensionnelles		OK	Ignoré.	Parfois	Néant
Qui l'utilise ?	Public cultivé, biologistes, militaires, etc.	G. Bellavitis, H. Weyl, A. Einstein.	Mathématiciens, certains physiciens théoriciens.	Physiciens, techniciens.	Des snobs ?
Qui sait l'utiliser avec sécurité ?	Public cultivé, biologistes, militaires, etc.	Vous, demain.	Mathématiciens	Certains d'entre les physiciens.	?

Qui en a besoin ?	Tout le monde : logistique, biologie.	Tous physiciens, tous techniciens.	Mathématiciens, physiciens	Personne.	Nul n'a besoin de désigner une liste par un autre vocable que "liste".
Désignation proposée :	vecteur	vecteur	**vectoroïde**	**Laxeur**	liste

Agrandissons la zone des trois-sans-lois, pour en mieux discerner le détail, et ses liens avec le voisinage :

	Tenseur sur un espace vectoriel ou affine.	Record homogène, compacté d'un tenseur.	Record homogène	Record hétérogène	Liste
Nature des composants, ou "champs".	Nombres ou grandeurs physiques homogènes.	En général des réels	Tous des entiers, ou tous des réels.	Nombres, champs logiques et énumérés.	N'importe quoi.
Sémantique	Selon rang du tenseur.	Empruntée à ce tenseur.	? ? ?	A détailler selon la nature des champs.	A découvrir sur place.
Addition, × par scalaire	OK	OK	Probablement sans objet.	Néant	Néant
Algèbre : règle de covariance	OK	A emprunter manuellement au tenseur signifié.	Probablement sans objet.	Néant	Néant
Cohérence avec sous-espaces, et sur-espaces	OK	Impossible	Impossible	Contradictoire	Néant
Symétries géométriques	OK	Impossible	Impossible	Contradictoire	Néant
Métrique	OK	A emprunter manuellement au tenseur signifié.	? ? ?	Contradictoire	
Physique : règles dimensionnelle s	OK	Possible, mais hasardeux.	? ? ?	Contradictoire	Néant
Qui l'utilise ?		Physiciens, techniciens.	Mathématiciens.		
Qui sait l'utiliser avec sécurité ?		Certains d'entre les physiciens.	Mathématiciens		
Qui en a besoin ?	Toute la physique	Personne.	Mathématiciens, physiciens		

Désignation proposée :	Rang 1 : **vecteur, covecteur**. Rang 2, antisymétrique : **Tourneur** **Tenseur**, sinon.	**Laxeur**	Record	Record	liste

Selon ce tableau, il faut considérer les six composantes du "*Sechstervektor*" qu'utilisait encore A. Einstein en 1916[2], et que Whittaker a utilisé jusqu'à la fin de sa vie ("*Six-vector*"), comme des records hétérogènes[3].

De même toutes les représentations usuelles des "torseurs", se caractérisent par leur hétérogénéité. Sans même mentionner que ce concept de "torseur" sert à confondre les grandeurs mécaniques avec les propriétés des solides indéformables, incassables, et indéchirables. Et que ça n'est guère un bénéfice. On y perd notamment le théorème des travaux virtuels, et toutes ses applications à prédire la stabilité et les oscillations.

3. Un vecteur, comme son nom l'indique, c'est pour les translations,

et c'est pour tout ce qui se déduit directement des translations, en physique : vitesse, accélération, quantité de mouvement, force, champ électrique, dipôle électrostatique, vitesse de diffusion ionique.

3.1. Définition : de la translation, à la classe d'équipollence des bipoints.

Le cahier des charges est de caractériser l'opérateur de translation. La définition formelle répondant à ces réquisitions, définit le vecteur comme **classe d'équivalence** de **bipoints**, par la relation d'***équipollence***. Cette définition n'est pas la définition minimaliste des espaces vectoriels abstraits. Mais c'est la plus petite qui couvre toutes les propriétés géométriques réellement utilisées par la physique élémentaire classique.

Nos nombres entiers, si familiers, sont aussi des classes d'équivalence : 2 n'est pas une paire de vaches, ni une paire de cailloux, mais est ce qu'il y a de commun à une paire de vaches, une paire de cailloux, une paire de claques, etc. par la relation : {il existe une bijection entre ces deux collections}.

Dans un espace E, comme notre espace ordinaire de la géométrie, les bipoints servent à résumer un déplacement, avec un point de départ, et un point d'arrivée.

Un bipoint : c'est un couple de points, respectivement le premier, ou **point de départ**, et le second, ou **point d'arrivée**. On le note (A,B). Les extrémités d'intervalles finis sur une droite, forment de tels bipoints.

On peut définir une addition : si le départ du second, est exactement l'arrivée du premier, (A,C) = (A,B) + (B,C).

Exemple : se rendre de Paris à Lyon, puis de Lyon à Marseille, revient à se rendre de Paris à Marseille. Puisqu'on ne s'intéresse qu'au point de départ, et au point d'arrivée.

On ne sait pas multiplier un bipoint par une constante. Mathématiquement, autant dire qu'on ne sait presque rien faire avec des bipoints.

Ajoutons l'hypothèse que dans notre espace E, le postulat d'Euclide soit vérifié : la parallèle d'une droite passant par un point, existe, et est unique[4]. Dans ce cas, les parallélogrammes existent.

---

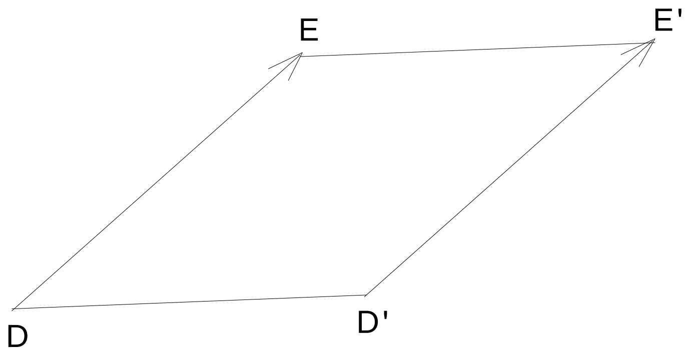
2 A. Einstein; *Eine neue formale Deutung der Maxwellschen Feldgleichungen der Elektrodynamik*. Prüss. Akad. Sitz. 1916. pp 184-188. Ce terme "*Sechstervektor*" a été propagandé (voire inventé ?) par Arnold Sommerfeld.

3 Sir E. Whittaker; *A History of the Theory of Aether & Electricity*. Dover Pub. New York. 1989. 1ère éd. 1951.

Définition : Les bipoints (D,E) et (D',E') sont dits **équipollents** si le quadrilatère DEE'D' est un parallélogramme.

De l'addition des bipoints, on déduit l'addition des vecteurs : pour tous points A, B, et C, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

C'est la **relation de Chasles.**



Disons-le autrement : dans un espace euclidien, et grâce aux parallélogrammes, on peut **transporter** les extrémités d'un bipoint, les éléments caractérisant une translation. Plus tard, pour parler d'orthogonalité, nous aurons besoin de choisir une norme euclidienne parmi toutes celles possibles.

La relation d'équipollence est une relation d'**équivalence**, ce qui par définition, veut dire trois choses :
que (A,B) est équipollent avec lui même.
Que si (A,B) est équipollent à (C,D), (C,D) est équipollent à (A,B).
Que si (A,B) est équipollent à (C,D), et que (C,D) est équipollent à (E,F), alors (A,B) est équipollent à (E,F).
Donc les bipoints (A,B) et (C,D) équipollents sont deux représentants valide du même vecteur : $\vec{AB} = \vec{CD}$.

On peut donc choisir ou déplacer comme on veut les représentants d'un ou de plusieurs vecteurs, pour rendre les calculs faciles, ou simplement possibles.
Si les points A et B sont confondus, le vecteur $\vec{AB}$ est le vecteur nul.

Maintenant, on peut toujours associer un vecteur à une translation dans l'espace E.

On peut additionner des vecteurs de E quelconques, en nombre quelconque, dans un ordre quelconque. On dit la même chose autrement, en disant que l'addition des vecteurs est associative et commutative. Tout vecteur a un opposé : $\vec{AB} + \vec{BA} = 0$. (déplacement nul)

Par généralisation de l'addition de vecteurs identiques, on peut donc multiplier des vecteurs par un entier quelconque.

Inversement, en utilisant le théorème de Thalès[5], on démontre facilement qu'on peut aussi diviser un vecteur par un entier quelconque. Il en résulte qu'on peut multiplier un vecteur par un nombre rationnel quelconque, et aussi diviser, par un rationnel quelconque non nul.

---

[4] Physiquement, un espace n'est euclidien - où la parallèle à une droite par un point existe, et est unique - que si on ne regarde pas trop loin, pas trop gros, ni trop petit. Un objet technique tel qu'un tour, une fraiseuse, une grue, s'inscrivent sans difficulté dans un espace euclidien. Il est impossible de réaliser à la surface de la Terre un objet matériel de plus de 20 km de dimension, qui incarne encore l'idéal euclidien : la courbure de la Terre, et les fléchissements des matériaux, dictent une loi plus dure que notre géométrie simplificatrice. On peut trouver des "objets" de lumière qui aient cette taille, voire plus grands, mais on ne les trouve que dans le vide, donc loin de la Terre, sinon les mouvements de l'air dévient la lumière; c'est pourquoi les étoiles scintillent à nos yeux. Et il faut les placer loin d'une masse importante comme le Soleil, ou autre étoile : les masses courbent la lumière dans leur voisinage... Les notions de droite et de parallèle nous claquent alors à la figure. Mais il nous reste le pouvoir de **décider** d'un espace idéal euclidien, local, tangent à l'espace réel.
Et si on regarde petit, alors on s'aperçoit que notre notion de point, qui nous semble si évidente, nous claque aussi à la figure : physiquement, le point n'existe pas. Il est impossible d'assigner à des électrons d'être là, en un point. Leur espace symplectique propre (de dimension au moins 6) se projette dans un certain volume diffus, qui ne peut ni être arbitrairement réduit, ni être totalement défini. Beaucoup des *mystères* de la chimie, par exemple la stabilité de la molécule de benzène, découlent de cette impossibilité d'assigner une position précise à un électron, ni à aucun autre quanton (objet quantique).

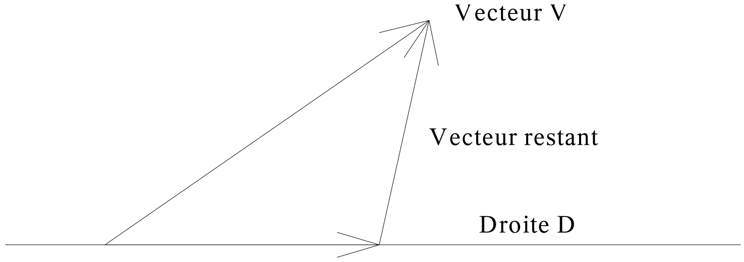
[5] Le théorème de Thalès, permet, par des reports parallèles, de mesurer **où l'on veut**, à partir de **où l'on sait**.

Nous rappelant les propriétés de **R** (**Q** est partout dense dans **R**), on admettra qu'on peut multiplier tout vecteur par un nombre réel quelconque, par exemple $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel [6]. Le corps des nombres *réels* **R**, est appelé "corps[7] des scalaires" pour notre espace des vecteurs. Nous verrons au chapitre des composantes, pourquoi ce baptême "scalaire", qui évoque une échelle.

4. Quatre projections pour la physique.

Puisque nous savons faire la somme et la différence de deux vecteurs, nous pouvons nous poser le problème suivant :

Soient une droite D, et un vecteur $\vec{V}$.
Peut-on décomposer le vecteur $\vec{V}$ en deux parties, une qui serait parallèle à D, nommée par exemple $\vec{V}_{//}$, et une autre ?



Une des projections possibles sur D

Jusqu'ici, notre problème admet une infinité de solutions. En particulier, dans le cas où D et $\vec{V}$ sont perpendiculaires, il y a une solution plus simple que toutes les autres : prendre $\vec{V}_{//}$ nul.

Il faut donc nous donner une contrainte supplémentaire : la direction de projection. En géométrie plane, cette direction de projection est une droite. En géométrie dans l'espace, cette direction est un plan.

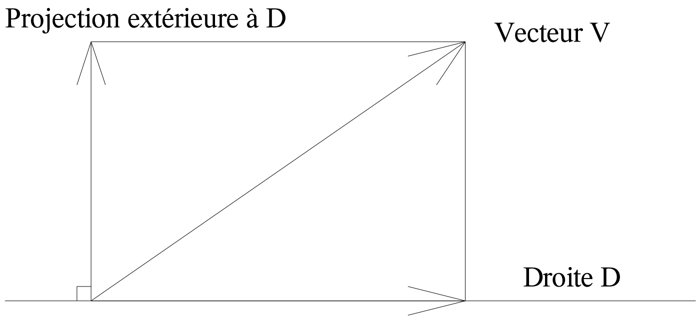
Le choix le plus simple - et physiquement le plus fécond - est de prendre la direction perpendiculaire à D. Mais tout autre choix de direction, autre que parallèle à D, serait aussi un choix mathématiquement valide.

Prenons désormais le choix de projection orthogonale à D (choix le plus simple). La décomposition de $\vec{V}$ est alors unique :

$\vec{V} = \vec{V}_{//} + \vec{V}_{\perp}$.

On désigne le restant de l'opération projection, la **projection extérieure de $\vec{V}$ sur D.**

$\vec{V}_{//}$ **est la projection intérieure.**



Projection intérieure sur D

Ceci est indispensable à la physique, pour définir les produits intérieur et extérieur, entre vecteurs.

Par exemple, en électricité, en représentation de Fresnel d'une tension et d'un courant alternatifs, quand on multiplie la tension par la projection intérieure de l'intensité, on obtient la puissance active.

Quand on multiplie la tension par la projection extérieure de l'intensité, on obtient la puissance réactive.

Avec un plan P et un vecteur, on définit de la même façon, la **projection intérieure sur ce plan : $\vec{V}_{//}$**, et la **projection extérieure au plan :** $\vec{V}_{\perp}$, qui est orthogonale à tout vecteur de P.

---

[6] La démonstration exige la continuité de l'application "multiplication par un scalaire". Aucun contre-exemple ne concerne la physique, qui a bien d'autres problèmes avec l'adéquation des nombres "réels" à ses besoins.

[7] En algèbre, on appelle corps un ensemble doté de deux lois de composition internes, et qui est un groupe commutatif pour la première. Privé de l'élément neutre de la première loi, il est aussi un groupe pour la seconde loi, qui de plus est distributive sur la première loi.
Un groupe est un ensemble sur lequel on a défini une loi de composition interne associative, présentant un élément neutre, et dont tout élément possède un inverse.

Une troisième projection : "dioptrique", ou "anti-intérieure".

La projection "dioptrique" régit la projection de la longueur d'onde sur le plan du dioptre. Nous la rencontrons en faisant la construction de Snell-Huyghens, pour les lois de réflexion-réfraction de Snell et Descartes. C'est la quantité λ_1 . sin i_1 = λ_2 . sin i_2 qui se conserve : une longueur de phase le long du plan du dioptre. Et corrélativement, la vitesse de phase le long du plan dioptrique. Il serait intéressant de revisiter la terminologie employée par Fresnel et Hamilton : ils ont certainement dénommé cette projection particulière.

L'inverse du vecteur longueur d'onde, ou covecteur nombre d'ondes par unité de longueur, se projette intérieurement sur le plan du dioptre. D'où le baptême suggéré de projection anti-intérieure pour la longueur d'onde sur le plan dioptrique.

Quatrième projection : anti-extérieure.

Elle est utile pour la loi de Biot et Savart, qui donne le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant électrique.

5. Suite

Dans le prochain article, nous verrons les autres conséquences de notre définition : variance des composantes, changements de base, invariance du module envers les changements de base, produit intérieur et produit intérieur contracté (produit scalaire). Ensuite, nous verrons le produit extérieur et les tourneurs. Puis nous verrons en détail la métrique et le calcul sur tourneurs et vecteurs, et leurs applications en cristallographie. Enfin nous verrons les liens entre dimension physique, et caractère tensoriel, puis les simplifications apportées à l'enseignement de l'électromagnétisme.