1. Objectifs

Les lois physiques, reliant des grandeurs entre elles, restreignent notre fantaisie. La vie serait simple, s'il suffisait du premier coup d'oeil à la dimension physique d'une grandeur pour trancher de son caractère géométrique. La physique entière n'a pas la simplicité de la seule cinématique. Nous aurons à tenir compte des densités et des capacités, pour tous les phénomènes de volume et de surface. Nous utiliserons le caractère extensif des grandeurs intervenant dans tous les grandes lois de conservation. Nous utiliserons le théorème d'Emmy Noether, et les implications du formalisme canonique.

2. Famille connexe des grandeurs de la mécanique.

C'est incontournable: les lois physiques relient les grandeurs entre elles. Savoir si toutes les grandeurs de la physique sont ainsi rigidement connectées, est un débat difficile. La mécanique est un domaine où la connexion entre grandeurs est assez simple, et peu discutable, surtout dans son formalisme newtonien. Dressons-en les tableaux, cinématique, et dynamique, afin d'en dégager des lois, au moins des lois phénoménologiques:

Cinématique:

$L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^{-1}	Angle: L^0	Longueur: L^1	Aire: L^2	Volume: L^3
pas de temps: T^0		Rotation, déformation	déplacement	aire orientée	volume ori.
T^{-1}	vitesse antilinéaire	vitesse angulaire	vitesse	vitesse aréolaire	
T^{-2}		accélération angulaire	accélération		

Dynamique:

$M.\ L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^{-1}	L^0	L^1	L^2	L^3
pas de temps: T^0		Masse		moment d'inertie	
T^{-1}			impulsion	moment angulaire, et action	
T^{-2}	contrainte, pression		force	moment d'une force, et énergie.	

On a bien quelques régularités remarquables dans ces deux tableaux, mais trop peu, semble-t-il:

Toutes les grandeurs vectorielles sont dans la colonne L^1, où la longueur figure à la puissance 1.

La colonne L^0 contient toutes sortes de tenseurs d'ordre deux: des tourneurs comme la vitesse angulaire, mais aussi le tenseur de rotation, qui n'est que partiellement antisymétrique, et aussi la déformation d'un solide ou d'un fluide, et sa vitesse de déformation.

La colonne L^2 aussi, *fait désordre*: elle contient à la fois des tourneurs, et tout autre chose. Autrement dit des produits extérieurs, des produits intérieurs, un produit tensoriel symétrique (le moment d'inertie). Nous verrons que seule la mécanique ondulatoire va résoudre ce paradoxe.

3. Famille connexe des grandeurs de l'électromagnétisme.

Nous avons à construire nos tableaux, en fonction des unités de base: masse, et charge électrique. On remarque des régularités similaires dans ces deux tableaux:

$Q. L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^0	L^1	L^2
T^0	Charge électrique	dipôle électrostatique	
T^{-1}	intensité	élément de courant	moment magnétique d'un aimant, d'une particule.

$M.Q^{-1}. L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^0	L^1	L^2
T^{-1}	champ magnétique	potentiel vecteur	flux magnétique
T^{-2}		Champ électrique	potentiel électrique

Toutes les grandeurs vectorielles sont dans la colonne L^1, où la longueur figure à la puissance 1.

Toutes les grandeurs tornatorielles sont dans la colonne L^0, ou dans la colonne L^2. Mais on y trouve aussi un vrai scalaire (la charge électrique), un faux "scalaire" (l'intensité), et un discutable (le potentiel). L'intensité dérive de la densité de courant, qui est en $Q.L^{-2}.T^{-1}$: coulomb par mètre carré et par seconde, ou encore coulomb par mètre cube, animé d'une vitesse. La densité de courant est la densité volumique du vecteur $q.\vec{v}$.

Trois relations diagonales, relativistes, sont bien en place, deux vectorielles, et une tensorielle: La charge électrique et l'élément de courant forment bien un vecteur de dimension 4 en espace de Minkowski. Ainsi que le potentiel-vecteur magnétique et le potentiel électrique: vecteur de dimension 4.

Le champ électrique et le champ magnétique forment bien un tenseur antisymétrique de rang deux en dimension 4: le tenseur dit "de Faraday", ou rotationnel du vecteur-potentiel précédent.

Trois anomalies sont résolues en considérant des densités volumiques:

Le "courant de déplacement" $\vec{\mathbf{D}}$ de Maxwell, de dimension $[L^{-2}. Q]$. Mais: $L^3. \vec{\mathbf{D}}$: $[L . Q]$.

C'est bien la dimension attendue d'un vecteur: déplacement de charges électriques dans un diélectrique.

La grandeur tornatorielle $\mathbf{H}$ (de dimension $[L^{-1}.T^{-1}. Q]$), comme densité volumique de vitesse aréolaire d'une charge électrique autour d'un axe: $L^3. \mathbf{H}$: $[L^2 . T^{-1} . Q]$.

Donc au prix de l'introduction des densités vectorielles et tornatorielles, la famille des grandeurs vectorielles retrouve son unité dimensionnelle de principe, de même la famille tornatorielle. Brillouin[1] et Barbotte[2] avaient bien vu le problème, mais hélas, le premier réflexe du physicien (moi aussi, je plaide coupable à ce sujet), est de bazarder ces "*subtilités inutiles*".

Il ne reste que le problème posé par le tenseur de Poynting, de dimension $[M . T^{-3}]$, flux de puissance électromagnétique franchissant une unité de surface. En milieu de propagation isotrope, il est sans grand danger de le confondre avec un vecteur. La contradiction éclate, dès que la radiation se propage dans un milieu anisotrope, tel un feldspath d'Islande, où la propagation est sensible à la polarisation.

De ce faux-vecteur, on déduit la pression de radiation (la contrainte de radiation, en milieu anisotrope) en le divisant par c/2 (dimension $[M . L^{-1} . T^{-2}]$): densité surfacique d'impulsion par unité de temps, en $[L^{-1}]$.

[1] Léon Brillouin; *Les tenseurs en mécanique et en électricité.* Masson. Paris 1938.

[2] Jean Barbotte; *Le calcul tensoriel*. Bordas, 1948. Paris.

On en déduit aussi la densité volumique d'impulsion transportée par l'onde, en le divisant par c²: dimension [M . L^{-2} . T^{-1}]. La loi générale des densités volumiques vectorielles, en [L^{-2}], est bien respectée. Les interventions de la constante c (et c²) jouaient à nous égarer - avec un succès certain.

Il est prudent de retenir que les densités et capacités sont, en réalité, de nature tensorielle, et que ce n'est que dans certains cas favorables, qu'on peut sans grand danger les assimiler à des tenseurs de rang moindre: scalaires, vecteurs, tourneurs.

4. Tableau de chasse; et sa mise en forme.

Rassemblons notre "tableau de chasse" des grandeurs vectorielles, et tornatorielles. Afin d'éviter d'entasser les densités et les capacités avec d'autres grandeurs très différentes, n'oublions pas de dérouler notre tableau, selon la valence brute totale (covariante + contravariante), au lieu de le tasser selon la valence nette.

	L^{-3}	L^{-2}	L^{-1}	L^{0}	L^{1}	L^{2}	L^{3}
rang zéro				Scalaire.			
rang un			Covecteur. Densité linéique de scalaire.		Vecteur. Capacité linéique de scalaire.		
tenseur de rang deux, (bivecteur) .		Cotourneur étendu. Densité superficielle de scalaire.		Tourneur strict. Densité linéique de vecteur.		Tourneur étendu. Capacité linéique de vecteur. Capacité superficielle de scalaire.	
tenseur de rang trois (trivecteur)	Densité volumique de scalaire.		Densité superficielle de vecteur. Capacité linéique de cotourneur étendu.		Capacité superficielle de covect. Densité linéique de tourneur étendu.		Capacité volumique de scalaire.
tenseur de rang ou ordre 4.		Densité volumique de vecteur.		Densité superficielle de tourneur étendu, ou capacité superficielle de cotourneur étendu.		Capacité volumique de covecteur.	
tenseur de rang ou ordre 5			Densité volumique de tourneur étendu.		Capacité volumique de cotourneur étendu.		

Ce tableau a une structure manifeste, avec seulement 15 cases remplissables, et suggère que les grandeurs de la physique macroscopique non relativiste répondent à une syntaxe beaucoup plus stricte qu'on n'a pensé à nous l'enseigner. Le tableau se reboucle en anneau: une densité volumique de capacité, en dimension 3, est scalaire! D'une façon générale, en dimension n, le tableau se reboucle après l'ordre 2n-1.

Or, s'il est une chose que les informaticiens ont appris, à leurs dépens, et fort rudement, c'est combien une stricte syntaxe dans le langage pratiqué, aide à dépister les inévitables erreurs que l'on commet au jour le jour. Faute d'être encadrés par une syntaxe claire et stricte, nombre de physiciens ont publié de fameuses bourdes, que la diplomatie interdit de citer avec une précision trop cruelle.

Pourtant, un examen serré montre que nous n'avons pas atteint une structure explicative tout à fait satisfaisante: que signifient ces rangs ou ordres 4 et 5? Nous n'en avons pas donné de définition précise, restant dans le flou heuristique. Utilisons donc les deux valences: (valence contravariante, valence covariante).

	L^{-3}	L^{-2}	L^{-1}	L^{0}	L^{1}	L^{2}	L^{3}
rang zéro				(0,0)			
rang un			(0,1)		(1,0)		
rang 2.		(0,2)		(1,1)		(2,0)	
rang 3.	(0,3)		(1,2)		(2,1)		(3,0)
"ordre 4"		(1,3)		(2,2)		(3,1)	
"ordre 5"			(2,3)		(3,2)		

Nous voyons enfin que dans la dimension L^{α}, l'indice α est égal à la valence nette. Nous devrons renoncer à l'espoir que le monôme dimensionnel net aide à distinguer la symétrie ou l'antisymétrie d'un tenseur; il ne nous donnera rien de plus que la valence totale nette. Il nous faut donc définir le monôme dimensionnel détaillé total, par exemple radians compris. Alors nous pouvons espérer de bons renseignements sur la symétrie, et le rang tensoriel.

Pour préparer une discussion relativiste, tentons de séparer quelques grandeurs qui seraient elles aussi en Mc², comme l'énergie, et comptons leur dimensionnalité à partir de Mc² au lieu de M:

Dynamique, famille de la masse (grandeurs toutes extensives, sauf la contrainte):

$M. L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^{-1}	L^{0}	L^{1}	L^{2}
T^{0}		(0,0) Masse		(2,0) moment d'inertie
T^{-1}			(1,0) impulsion	(2,0) moment angulaire
T^{-2}	(1,2) contrainte, pression		(1,0) force	(2,0) moment d'une force

Dynamique, famille de l'action (ou peut-être de l'énergie?):

$Mc^2. L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^{-3}	L^{-2}	L^{-1}	L^{0}
T^{1}			(0,1) impulsion	(0,0) action
T^{0}	(0,3) contrainte, pression		(0,1) force	(0,0) énergie
T^{-1}		(3,1) tenseur de Poynting		

On aura remarqué l'ambigüité du statut de la force, et peut-être de l'impulsion, qui jouent sur les deux tableaux. De même, le tenseur de contrainte (ou de pression s'il est isotrope) est aussi bien produit d'un vecteur force par un covecteur surface, que densité volumique d'énergie élastique. Du moins à première vue.

Sans doute faut-il accepter ce double-jeu comme inhérent à la nature des choses de la Nature, et non comme artéfact dû à nos habitudes de représentation?

En électromagnétisme, la famille de la charge électrique ne présente ni surprise ni irrégularité:

Q. $L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^{-2}	L^{-1}	L^{0}	L^{1}	L^{2}
T^{0}	(1,3): densité de polarisation: $\vec{\mathbf{D}}$		(0,0): Charge électrique	(1,0): dipôle électrostatique	
T^{-1}	(1,3): densité de courant $\vec{\mathbf{j}}$	(2,3): densité de moment magnétique $\mathbf{H}$	(1,1): intensité d'un courant.	(1,0): élément de courant $\mathbf{i}.\vec{\mathbf{dl}}$	(2,0): moment magnétique d'un aimant, d'une particule.

Q. L^{α}.	L^{-3}	L^{-2}	L^{-1}	L^{0}	L^{1}
rang zéro: scalaire				(0,0) Charge électrique	
rang un: vecteur			(0,1): d. linéique		(1,0) dipôle électrostatique
ordre 2		(0,2): densité surfacique de charge			
ordre 3	(0,3): densité volumique de charge				
ordre 4		(1,3) : $\vec{\mathbf{D}}$:densité volumique de polarisation			

Q. $L^{\alpha}.T^{-1}$	L^{-2}	L^{-1}	L^{0}	L^{1}	L^{2}
rang zéro:			(0,0): intensité d'un courant ?		
rang un: vecteur				(1,0): élément de courant $\mathbf{i}.\vec{\mathbf{dl}}$	
ordre 2	(0,2): densité surfacique de courant dans un fil.		(1,1): intensité d'un courant ? Densité linéique d'élément cour.		(2,0): moment magnétique d'un aimant, d'une particule.
ordre 3		(1,2): densité surfacique d'élément de courant.		(2,1): densité linéique de moment magnétique.	

ordre 4	(1,3): densité volumique d'élément de courant $\vec{\mathbf{j}}$		(2,2): densité surfacique de moment magnétique.		
ordre 5		(2,3): densité volumique de moment magnétique $\overset{\lrcorner}{\mathbf{H}}$			
ordre 6			(3,3): intensité d'un courant ?		

En électromagnétisme, la famille du potentiel et du champ présente une ambigüité: si on la considère comme famille dépendante de l'action ou de l'énergie, divisées par la charge électrique, le potentiel électrique prend une place rassurante de quasi-scalaire (composante temporelle d'un covecteur de dimension 4), et le champ électrique prend une place de covecteur plus en accord avec sa définition usuelle comme gradient du potentiel. Mais l'aspect est plus douteux quant aux positions des tourneurs $\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}$ et $\overset{\lrcorner}{\Phi}$. Certes compatibles, mais peu convaincantes:

$Mc^2.Q^{-1}.L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^{-2}	L^{-1}	L^{0}	
	(0,2)	(0,1)	(0,0)	
T^{1}	champ magnétique	potentiel vecteur: hamil/coulomb	flux magnétique: maupertuis/rad.Cb	
T^{0}		Champ électrique: newton/coulomb	potentiel électrique: joule/coulomb	Flux électrostatique de Gauss

$M.Q^{-1}.L^{\alpha}.T^{-\beta}$	L^{0}	L^{1}	L^{2}	
	(1,1)	(1,0)	(2,0)	
T^{-1}	champ magnétique	potentiel vecteur: hamil/coulomb	flux magnétique: maupertuis/rad.Cb	
T^{-2}		Champ électrique: newton/coulomb	potentiel électrique: joule/coulomb	Flux électrostatique de Gauss

Les critères précédents laissent des doutes: faut-il prendre au sérieux ces cinq derniers tableaux?

La Relativité nous enseigne une connexion en diagonale dans le tableau des grandeurs dynamiques: l'impulsion et l'énergie cinétique sont les quatre composantes d'un vrai vecteur en dimension 4, l'impulsion-énergie, qui est lui, un vrai invariant relativiste.

L'action d'Euler-Hamilton, est aussi un vrai invariant relativiste, et **semble** scalaire. Depuis 70 ans, on a cultivé l'ambigüité sur la nature de ***h*** et de $\hbar$, indifféremment quantum d'action (produit intérieur d'une impulsion par une distance), ou quantum de module de moment angulaire (produit extérieur). Le lever de doute était pourtant donné dès la formulation ondulatoire de la mécanique quantique, par Louis Victor de Broglie. L'action est toujours multiple entière du quantum ***h*** de Planck. Alors que le module du moment angulaire est toujours multiple demi-entier du quantum $\hbar$ de Dirac; $\hbar = h / 2\pi$. **L'unité élémentaire d'action *h* est égale au produit de l'unité élémentaire de moment angulaire $\hbar$, par un tour complet, 2 π radians.**

Ce n'est que très rarement exposé clairement, sans doute à cause de la manie de prendre les angles pour des nombres sans dimension. Or le simple fait qu'on ait pu prendre plusieurs unités d'angle, qui toutes ont donné satisfaction (le tour, le degré, le grade, le millième des artilleurs, le quart des marins, et le radian), prouve que l'angle géométrique n'est en aucune façon un simple nombre. Le lever de doute final est fourni par la Relativité Générale, qui relie tout angle à deux longueurs, dont l'une peut être l'inverse de la coubure locale. Seule la phase d'un angle exprimé en radians, autrement dit l'argument d'une fonction cosinus ou sinus (parties réelle et imaginaire d'une fonction exponentielle complexe), peut être un nombre.

Mais dans tout les cas, angle ou phase, on a toujours affaire à une **classe d'équivalence de plusieurs transformations**. Prenons le cas d'un angle orienté:

Pour un moteur, il n'est nullement indifférent, d'avoir tourné exactement dix tours, ou exactement dix millions de tours... L'usure ne sera pas la même, ni le travail fourni. En ce sens, même si dans les deux cas, le moteur est retourné à son orientation initiale, ses angles de rotations ne sont nullement les mêmes. En revanche, si on ne regarde que les sinus, cosinus et tangente de ces angles, alors ils deviennent indiscernables. L'*angle orienté* usuel d'axes, ou sa mesure principale, n'est que la classe d'équivalence des angles qui ont les mêmes fonctions trigonométriques.

J'ai été étonné des difficultés des physiciens les plus qualifiés à éclaircir un point finalement si simple. Cela donne une mesure de la crise actuelle de la physique théorique. J'ai été étonné d'avoir besoin d'aller chercher si loin, les arguments théoriques nécessaires pour remettre de l'ordre dans la physique élémentaire.

5. L'action et le formalisme hamiltonien.

5.1. Noether et le formalisme canonique.

Le théorème de Noether, et le formalisme de Hamilton[3], puis les relations d'indétermination de Heisenberg, nous montrent à l'évidence, que certaines grandeurs sont conjuguées:

Coordonnée sans masse.	Coordonnée massique (conservative dans les symétries noethériennes).	Produit des deux coordonnées conjuguées.
déplacement	impulsion	action
angle	moment angulaire	action
durée	énergie	action
angle, par tours entiers	quantum de moment angulaire ћ	action
nombre de quanta	quantum d'action ***h***	action
Potentiel électrique × durée	charge électrique	action
potentiel magnétique × longueur	charge électrique	action
	Extensives non conservatives.	
potentiel magnétique	charge × longueur	action
champ magnétique B	charge électrique × aire	action
Potentiel électrique	charge électrique × durée	action

Les produits en question sont toujours des produits intérieurs. Ils donnent une action, qui, en l'état actuel de nos connaissances, est un scalaire. L'intervention éventuelle du radian comme unité d'angle (ou quotient de

3 L. Landau & E. Lifchitz; *Physique théorique. T1. Mécanique*. Ed. Mir. Moscou 1982.

deux longueurs perpendiculaires et égales) a sciement été omise dans l'expression des grandeurs magnétiques.

Le produit d'un déplacement par une impulsion, est un produit intérieur de vecteurs. On dit aussi que c'est une circulation.

Le produit d'un angle par un moment angulaire, est un produit intérieur de tenseurs de rang deux, dont un au moins est antisymétrique.

Et si l'on assimile (au moins provisoirement) la durée et l'énergie à des scalaires, il n'y a aucune contradiction à considérer que leur produit est un cas particulier de produit intérieur.

Ce tableau montre déjà qu'on a eu tort d'oublier de donner un nom aux unités d'action, de moment angulaire, et d'impulsion. En MKSA, je suggère hamil (abrégé de Hamilton) pour l'unité d'impulsion, et maupertuis pour l'unité macroscopique d'action hamiltonienne. Abréviations: Ha, Mau.

Pour le moment angulaire, nous allons payer notre imprévoyance. Guidé par la mécanique quantique, qui a établi que le quantum de moment angulaire est le planck par radian, $\hbar$, peut-être devrait-on adopter le maupertuis par radian, Mau.rad^{-1}. Paradoxalement, cela devrait éviter des problèmes de rationalisation, avec quelques 2π par ci par là. Ce qui n'aurait pas manqué d'arriver si on prenait le maupertuis par tour.

Or, **ces grandeurs canoniquement conjuguées ont toujours même symétrie**, et peuvent validement être considérées comme duales, dans un système d'unités centré sur le quantum d'action.

C'est évident si l'on regarde les équations canoniques de Hamilton, où l'énergie du système est exprimée en fonction des coordonnées q et des impulsions généralisées p:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \text{et} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Si dans ce système, on regarde le déplacement comme vecteur, l'impulsion est covecteur associé. Dans ce système, le vice-versa est aussi valide: l'impulsion comme vecteur, le déplacement comme covecteur associé.

La durée et l'énergie sont composantes duales. En ce sens que les vecteurs de dimension 4 impulsion-énergie, et déplacement-durée, sont duaux.

De même, l'angle et le moment angulaire sont tenseurs duaux. Seuls les angles infinitésimaux, et les angles droits, donnent mathématiquement des tourneurs. Pour garder la structure profonde du tableau, il faut admettre de classer les tourneurs et les rotateurs dans une même famille de tenseurs, dont le nom reste à trouver, et qui sont antisymétriques dans leur restriction au plan stable.

Il faut accepter la coexistence de ces deux systèmes de représentations, celui-ci centré sur l'action et sur le lagrangien, et celui plus connu centré sur la masse, correspondant au formalisme newtonien. Tous deux véhiculent une forte part de réalisme.

Ceci implique que selon le système de représentation, les caractères "vecteur" ou "covecteur" peuvent glisser ou se permuter, et de même les caractères de "tourneur strict", tourneur étendu", "cotourneur étendu". Mais que dans tous les cas, aucun membre de la famille tourneur ne devient membre de la famille vecteur, ni l'inverse. Les symétries vectorielles, et tornatorielles, ont une permanence physique intrinsèque, sur laquelle le physicien peut faire fond, en toute confiance.

La coexistence de ces deux systèmes de représentation, l'un centré sur la masse, l'autre sur l'action, assure des équations physiques, qui soient toutes limitées au premier ordre de dérivation. En effet le nombre **deux**, l'ordre deux, présent dans les formalismes newtonien et maxwellien classiques, est bel et bien un "*nombre magique*". Pourquoi justement la dérivation arrêtée à l'ordre 2, et pas 1 ni 3 ni 4? La limitation à l'ordre 1 implique le doublement des variables à dériver à l'ordre 1, ce qui était justement déjà réalisé par les formalismes lagrangien, et surtout hamiltonien. Le théorème de Noether, et la conjugaison géométrique des conjugués canoniques, que nous venons de mettre en évidence, justifient amplement ce doublement.

Domaine de validité, aussi bien du théorème de Noether, que de la distinction entre grandeurs extensives, et grandeurs intensives: l'espace doit être localement euclidien, autrement dit, localement dépeuplé, avec des champs tous faibles, afin que le postulat de superposabilité soit approximativement exact. Autrement dit, les déplacements mis en jeu sont petits devant la distance aux autres objets massifs notables.

5.2. En translation, avec la somme des forces.

Nous pouvons étudier le résultat de la somme des forces de deux façons: **le long du chemin** parcouru par le centre d'inertie du système, ou **le long de la durée** qu'a pris le mouvement.

$$\sum_{\text{sytème}} \vec{F_i}$$

Intégration selon le chemin.

Intégration selon la durée.

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{\text{système}} \vec{F_i} . \vec{ds} = \Delta W$$

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{\text{système}} \vec{F_i}\, dt = \Delta \sum_{\text{système}} \vec{p}$$

Autrement dit, sous forme différentielle:

$$\vec{F} = \frac{dW}{\vec{ds}}$$

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt} \quad (\text{avec } \vec{p} = m\,\vec{v})$$

Par définition, la quantité ΔW, est appelée le travail de cette force, durant le déplacement de son point d'application. Cette quantité, travail, a la dimension physique d'une énergie.

$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt}$ est l'expression physiquement correcte, car des deux côtés du signe égale, figurent des grandeurs **extensives**, ainsi qu'il est de règle pour toute loi de conservation. Alors que ce n'est pas réalisé dans la formule analytisée ultérieurement par Newton: $\vec{\mathbf{F}} = m\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}}{dt^2}$. Là seule la masse **m** est grandeur extensive; on ne voit donc pas apparaître un grand principe, mais une magie étrange, portant apparemment sur la cinématique.

Une grandeur est extensive, si elle s'additionne avec l'ajout de sous-systèmes. Deux masses de 1 kg font une masse de 2 kg. La masse est grandeur extensive. Si vous poussez à deux votre voiture en panne, l'équipe est deux fois plus forte qu'un seul homme: la force est grandeur extensive. Si vous liez côte à côte deux mobiles dont la quantité de mouvement est de 1 kg.m/s chacun, l'ensemble a une quantité de mouvement de 2 kg.m/s. L'impulsion est grandeur extensive.

La vitesse et l'accélération ne sont pas des grandeurs extensives. Si vous mettez côte à côte deux mobiles dont la vitesse est de 1 m/s chacun, l'ensemble n'a pas une vitesse de 2 m/s.

Ecrivons ces lois de conservation:

Conservation de l'impulsion: $\sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d\sum \vec{\mathbf{p}}}{dt}$

Conservation du moment angulaire: $\sum \overset{\lrcorner}{\mathbf{M}} = \sum \frac{d\overset{\lrcorner}{\sigma}}{dt} = \frac{d\sum \overset{\lrcorner}{\sigma}}{dt}$

Conservation de la charge électrique:

$\mathrm{div}\ \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ **[M.T^{-2}.Q^{-1}]** (Egalité scalaire).

$\vec{\mathbf{Div}}\ \overset{\lrcorner}{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}}$ **(** = $\frac{\partial \mathbf{B}^{\mu\lambda}}{\partial x^{\lambda}} \vec{e}_{\mu}$) **[M.L^{-1}.T^{-1}.Q^{-1}]** (Egalité vectorielle).

Conservation de la masse: (pour mémoire)

5.3. Relation d'exogamie entre grandeurs physiques.

Généralisons la remarque que les grandeurs conjuguées au sens de Noether, sont reliées par des produits intérieurs pour donner une action. Les grandeurs ainsi reliées physiquement par un produit intérieur, pourront être dites "en relation d'exogamie".

Nous allons donc compléter le tableau des conjuguées par l'action, par le tableau des conjuguées par l'énergie (ils intéressent tout le monde, ingénieurs comme scientifiques: on dimensionne un stock d'énergie en fonction du produit des grandeurs conjuguées par l'énergie):

Coordonnée sans masse, ou intensive.	Coordonnée massique (conservée en symétrie noethérienne)	Produit des deux coordonnées conjuguées.
vitesse linéaire	impulsion	énergie
vitesse angulaire	moment angulaire	énergie
potentiel électrostatique	charge électrique	énergie
	Grandeurs extensives non conservatives	
déplacement	force	énergie
angle	moment d'un couple	énergie
champ électrique (V.m^{-1})	polarisation électrique × volume, ou dipôle électrostatique	énergie
potentiel magnétique	intensité × longueur = charge × vitesse	énergie
champ magnétique (V.s)	polarisation magnétique × volume, ou moment magnétique	énergie

Ecrivons aussi les conjuguées par la puissance (ils intéressent l'ingénieur: on dimensionne ainsi une machine):

Coordonnée sans masse, ou intensive.	Coordonnée massique, ou extensive.	Produit des deux coordonnées conjuguées.
accélération linéaire	impulsion	puissance
accélération angulaire	moment angulaire	puissance
dV/dt, variation temporelle de potentiel électrostatique	charge électrique	puissance
	Grandeurs extensives non conservatives.	
vitesse linéaire	force	puissance
vitesse angulaire	moment d'un couple	puissance
ΔV, variation de potentiel électrostatique	intensité de courant	puissance
potentiel magnétique	charge × accélération; intensité × vitesse	puissance
dE/dt, variation temporelle de champ électrique ($V.m^{-1}. s^{-1}$)	polarisation électrique × volume, ou dipôle électrostatique	puissance
dB/dt, variation temporelle de champ magnétique (V)	polarisation magnétique × volume, ou moment magnétique	puissance

Pour être complet, il aurait fallu ajouter des conjugués à intérêt plus technologique, comme pression × débit = puissance, pour l'hydraulique, et d'autres produits utiles en résistance des matériaux, en acoustique, etc.

La majorité (tous? à vérifier) des produits extérieurs rencontrés en physique, sont intrinsèquement hors de la relation d'exogamie. On peut ainsi multiplier extérieurement des mètres par des mètres, afin d'obtenir des mètres carrés. On peut multiplier extérieurement des mètres par des inverses de mètres, on obtient alors un angle, sous la forme d'un tenseur de rang deux (antisymétrique si l'angle est un quart de tour).

Alors que dans le système international d'unités, la répartition de la réalité physique entre produits intérieurs et produits extérieurs, semblait faite de hasards fortuits, elle devient nécessaire et cohérente, dans un système d'unités symétrisé par le théorème de Noether, autour de l'unité d'action et de l'unité de charge électrique, véritables invariants relativistes.

6. Conclusion provisoire en proverbes.

Il semble indispensable que le système d'unités international soit révisé de fond en comble à la lumière du théorème de Noether, et symétrisé autour des invariants relativistes. Sinon, la mécanique réclamera le double jeu d'unités de base: M,L,T,Q, et A, L, T, Q (Le Kelvin, la candela, la mole ne jouent pas de rôle en mécanique). Le premier est basé sur la masse, le second sur l'action, dont le quantum est h. Le premier semble incontournable, au moins en physique macroscopique, le second est inévitable, surtout en physique quantique. L'ambigüité entre les deux systèmes partiels semble intrinsèque à la nature, et non aux physiciens.

Le passage d'un système d'unités à l'autre ne bouleverse jamais le type fondamental de symétrie d'une grandeur: le genre tourneur, et respectivement le genre vecteur sont stables dans ce passage.

La mécanique hamiltonienne, puis la mécanique statistique faisaient déjà grand usage de ce double système de coordonnées, dans l'espace d'extension en phases à six dimensions abscisse-impulsion. L'avantage étant de pouvoir écrire les grandes lois de conservation entièrement en dérivations premières, sans dérivées secondes, et entièrement en grandeurs extensives.

L'analyse dimensionnelle permet de prédire la valence tensorielle nette d'une grandeur physique, mais ne permet de rien prédire de ses symétries, et donc rien non plus de ses valences covariantes ni contravariantes. Il est indispensable de tenir compte du caractère tensoriel des densités et capacités volumiques, et des densités et capacités surfaciques.

Deux grandeurs conjuguées dans le théorème de Noether, sont en même temps conjuguées canoniques, et ont même symétrie tensorielle. Du moins en physique élémentaire, macroscopique.

Le formalisme symplectique, malgré le poids social écrasant des traditions techniques newtoniennes, est celui qui induit le plus grand réalisme physique.