Des grandeurs qui ne sont pas vectorielles: les tourneurs.

Pour ne plus violer la syntaxe géométrique de la physique.

0 . 1 . Prérequis.

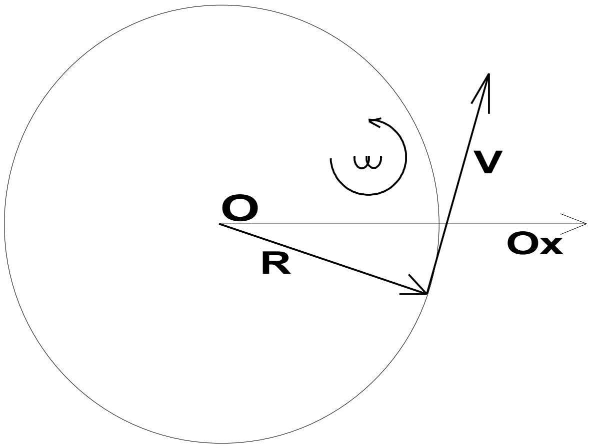
La leçon sur les bipoints, les vecteurs, projection intérieure et projection extérieure.
Repérer un point par ses coordonnées sur un repère. Projeter un point sur les axes du repère. Les translations dans le plan ou l'espace. Le sinus et le cosinus d'un angle. L'angle d'une droite et d'un plan. Les nombres complexes ne sont nécessaires que pour comprendre le rappel des erreurs historiques.

1 . Le besoin en physique : le quart-de-tour entre deux vecteurs.

Un petit nombre de lois physiques expriment qu'une grandeur vectorielle est perpendiculaire à une autre. Il faut projeter dans un plan de direction donnée, puis faire un quart de tour dans ce même plan, pour tracer le second vecteur, puis le multiplier par une grandeur physique scalable précise. L'étude du bref inventaire exhaustif de ces lois, vérifie qu'elles expriment toutes la partie infinitésimale d'une **rotation infinitésimale** :

1 . 1 . En cinématique, description du mouvement circulaire :

Prenons le cas d'un "point matériel" M en rotation uniforme autour d'un centre O, à la distance R (fixe) de ce centre de rotation O. Le plan de rotation est fixe.



L'opérateur "vitesse angulaire" (qui contient un opérateur "quart de tour") appliqué au rayon vecteur (de l'axe au point M), donne la vitesse périphérique :

$$\vec{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\omega}}.\vec{\mathbf{R}}$$

Les orientations de $\vec{v}$ et $\vec{R}$ changent constamment, mais leurs modules restent constants.

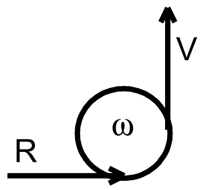
Et la vitesse angulaire $\overset{\lrcorner}{\omega}$ est bien constante, pour un mouvement de rotation uniforme.

L'accélération centripète s'exprime par le produit de la vitesse périphérique, par la vitesse angulaire :

$\vec{\gamma} = \underline{\underline{\omega}}.\vec{\mathbf{v}}$. Dans les deux cas, $\underline{\underline{\omega}}$ (ou $\overset{\lrcorner}{\omega}$: la notation mérite discussion) relie deux vecteurs orthogonaux.

Dans le plan de rotation, il serait judicieux de dessiner ces relations géométriques

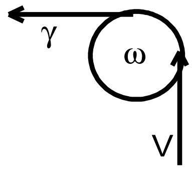
$\vec{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\omega}}.\vec{\mathbf{R}}$, ou $\vec{\mathbf{v}} = \overset{\lrcorner}{\omega}.\vec{\mathbf{R}}$, ainsi :



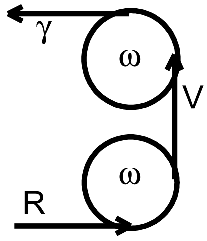
Unité de $\overset{\lrcorner}{\omega}$: le radian par seconde.

L'accélération centripète :

$\vec{\gamma} = \underline{\underline{\omega}}.\vec{\mathbf{v}}$, ou : $\vec{\gamma} = \overset{\lrcorner}{\omega}.\vec{\mathbf{v}}$, par ce connecteur :



Et on peut réunir ces deux connecteurs, pour relier directement l'accélération centripète au rayon vecteur : $\vec{\gamma} = -|\omega|^2\,\vec{\mathbf{R}}$.



Paradoxe : qu'est donc ce radian dont le carré vaut –1 ?
C'est le quotient de deux longueurs perpendiculaires, et égales.

Ce genre de dessin de connexion se retient facilement, car il ressemble à une courroie qui passe sur des poulies. Il ne signifie pas "poulies et courroie" ! Il signifie une connexion géométrique entre trois grandeurs vectorielles, et la grandeur $\underline{\underline{\omega}}$. Ces quatre grandeurs physiques sont dans un même plan.

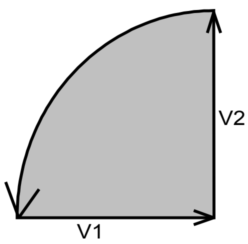
Définition : les grandeurs physiques qui ont la propriété de faire faire un quart de tour à une grandeur vectorielle, pour donner une autre grandeur vectorielle, sont dénommées des **tourneurs**.

Avant d'avoir défini mathématiquement la nature géométrique de la grandeur $\underline{\underline{\omega}}$, vitesse angulaire, nous avons du moins établi que nous en avons besoin, et quelles sont ses propriétés exigées. C'est un **cahier des charges**. Il serait correct de définir $\underline{\underline{\omega}}$ comme le quotient de la vitesse périphérique par le rayon vecteur du point matériel, et aussi comme le quotient de l'accélération centripète par la vitesse périphérique.

1 . 2 . Moment d'une grandeur vectorielle.

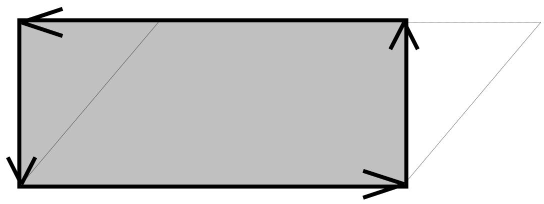
En mécanique, le moment d'une force, réclame un être géométrique légèrement différent, car là il s'agit du produit d'un vecteur par la projection extérieure de l'autre, et non plus de leur quotient. Applications : balance à fléau, balance Roberval, engrenages, poulies, leviers, etc...

On pourrait dessiner cette relation ainsi :



Ceci représente le produit extérieur de deux vecteurs vrais[1] V1 et V2. Avec un secteur en grisé, pour rappeler que le produit de deux vecteurs perpendiculaires **est une surface**. Nous verrons plus loin qu'il a pourtant exactement les mêmes éléments de symétrie que le tourneur vitesse angulaire.

Une solution plus classique, et plus rationnelle, consiste à dessiner l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs dont on fait le produit extérieur. Cette aire est orientée, avec un sens de parcours de son périmètre.



Ce produit extérieur[2], utilise le sinus de l'angle des vecteurs, et a été inventé en 1844 par Hermann Grassmann (1809-1877). Son résultat a été dénommé un **bivecteur** par E. Cartan[3]. Nous préférons le dénommer "tourneur étendu". Deux bivecteurs sont équivalents s'ils appartiennent à la même direction de plan, qu'ils ont même aire, et tournent dans le même sens autour de cette aire. Cette relation d'équivalence, est la réplique fidèle de l'équipollence des bipoints, définissant l'égalité des vecteurs. Cette partie mathématique a été correctement exposée par Postnikov[4]. Le sinus est une fonction impaire : (sin(-x) = -sin x), donc le produit extérieur est anticommutatif : $V1 \wedge V2 = - V2 \wedge V1$. On dit aussi que cet opérateur "$\wedge$" est antisymétrique.

Ce produit extérieur, dont le résultat est un tourneur étendu, représente bien une troisième loi de la mécanique : la loi de conservation du moment angulaire, produit extérieur du rayon vecteur par l'impulsion.[5]

---

1 Michel Hulin écrivait : *vecteurs de bonne foi.*

2 Aussi nommé "*produit géométrique*" par Barré de Saint-Venant en 1845 : "*Mémoire sur les sommes et différences géométriques et sur leur usage pour simplifier la Mécanique*", note à l'Académie des Sciences.

3 E. Cartan; *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris 1946.

4 M. Postnikov; *Leçons de Géométrie. Géométrie analytique.* (généralisations dans: *Algèbre linéaire et Géométrie différentielle*). Editions Mir. Moscou. 1981.

5 Certains physiciens me reprochent d'avoir pris un mot distinct, bref, et limpide, pour désigner cette classe d'objets géométriques et algébriques. Certains objectent que *tenseur antisymétrique du second ordre* (ou de rang deux) existe déjà, et qu'*il n'y a qu'à* enseigner beaucoup plus tôt les tenseurs. S'ils s'imaginent qu'ils vont faire entrer "tenseur antisymétrique de rang deux" et "tenseur de rang un" dans les ateliers de mécanique et d'électrotechnique, qu'ils regardent de plus près ces élèves-là, et leurs professeurs. Bonne chance ! Ou pensaient-ils à une ségrégation sociale : laisser le jargon *petit-nègre* à l'enseignement technique, et réserver la physique cohérente aux fils de seigneurs ?
Ceux qui proposent de garder à cette place *vecteur axial* ou *pseudovecteur*, oublient que leurs collègues moins éclairés lisent alors invariablement, et croient, et enseignent, *vecteur*. Tout court. Car ils ignorent que "*pseudo*" signifie "faux".
Des mathématiciens objectent que *bivecteur* existe déjà, utilisé par E. Cartan (et Poincaré ?). N'oublions pas le critère de limpidité. Allez dans les laboratoires, dans les ateliers; faites-y deviner le sens physique de *bivecteur*... De plus, des auteurs américains utilisent ce mot pour désigner de simples vecteurs, mais à coefficients complexes.

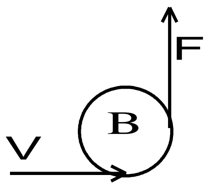
1 . 3 . Electricité : Loi d'Ampère-Laplace.

Prenons un électron, lancé dans le vide d'un tube de téléviseur, ou d'un magnétron, ou d'un microscope électronique. Il est lancé avec une vitesse **v**, et rencontre un champ magnétique **B** (qui a la nature géométrique d'un tourneur).

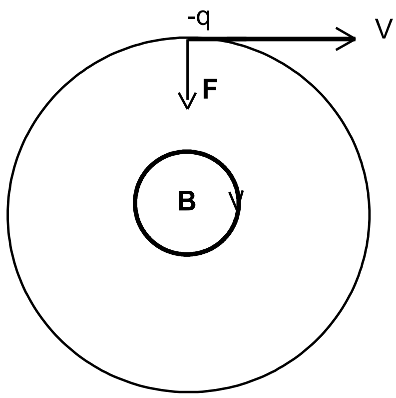
• Cas particulier : le plan du champ magnétique est bien parallèle au vecteur vitesse de l'électron. Le champ dévie alors l'électron dans une trajectoire circulaire. L'impulsion communiquée à l'électron par le champ magnétique reste alors toujours perpendiculaire à la vitesse, et le module de la vitesse ne change pas.

• Cas général : La trajectoire est hélicoïdale, avec la section circulaire de l'hélice dans la direction de plan du champ magnétique. **Le champ B n'agit que sur la projection intérieure de la vitesse sur le plan stable de B**. La projection extérieure de la vitesse est inchangée, et donne l'axe de la trajectoire hélicoïdale.

Dessinons, dans le cas simple, avec trajectoire circulaire :



Expression mathématique de la loi.



Trajectoire d'un électron dans un champ magnétique B, coplanaire à sa vitesse V

• Pour une charge mobile, une particule :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\, q\ \overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{v}}$$

Dans le cas général, seule n'intervient que la **projection intérieure** de $\vec{\mathbf{v}}$ sur le plan stable de $\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}$.

$\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{v}}$ dérive du **produit intérieur**, par contraction.[6]

L'expression analytique de $\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}$, opérateur antisymétrique de rang 2, reflète qu'il est la composition d'une projection sur le plan "propre" stable, et d'une rotation d'un quart de tour dans ce plan stable.

• Pour un conducteur parcouru par l'intensité i :

$$d\vec{\mathbf{F}} = -\ \overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}.(\mathbf{I}\,\vec{dl}) \qquad \textbf{(Loi d'Ampère-Laplace)}.$$

Signification physique du signe moins : deux courants de sens contraire se repoussent, de même sens s'attirent (c'est la loi qui donne la définition légale de l'ampère). Le champ $\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}$ est celui produit par les autres éléments de courant.

1 .4 . Loi de Biot et Savart,

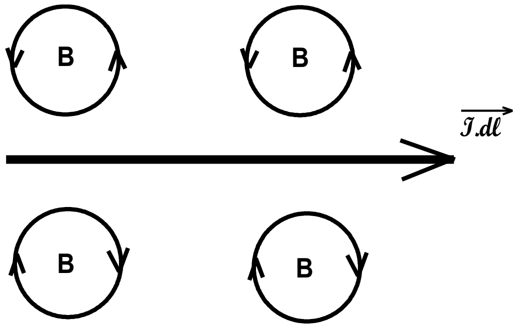
donnant le champ en fonction des circuits et de l'intensité qui les traverse. D'abord, on va se contenter d'en donner le sens, en fonction du sens des courants.

Les gens moyens exigent des idées simples dans des mots simples, faisant image d'action.

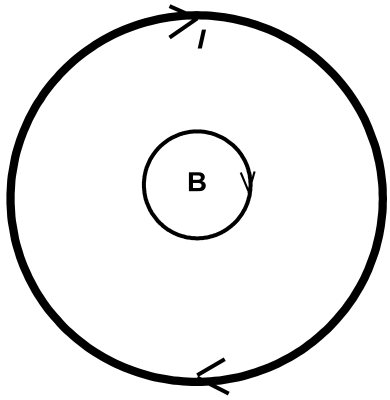
[6] Elie Cartan confondait "*produit intérieur*", avec "contracté du produit intérieur", et avec "bicontracté du produit intérieur". Pourtant, leurs dimensions, et leurs variances sont très dissemblables.

Cas de figure : dans le plan en section d'une nappe de courant, ou dans l'espace, dans un plan passant par le fil conducteur :

Le tourneur champ magnétique, tourne dans le sens où, d'où l'on est, l'on voit défiler le vecteur élément de courant, $i.\vec{dl} = dq.\vec{v}$, pour donner le champ magnétique $\vec{B}$.



:hamp magnétique B produit par une spire ou une bobine



Cas de figure : spire circulaire, ou solénoïde.

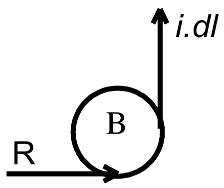
Un rond dans un rond, et qui tournent pareil !

Pleurnichera-t-on que c'est *trop compliqué* ?
Ou trop mathématique ?

Dans tous les cas, le mnémonique est un roulement à billes, ou un chemin à billes.

Ces trois derniers schémas sont dus à l'académicien Pierre Léna, vers 1964.

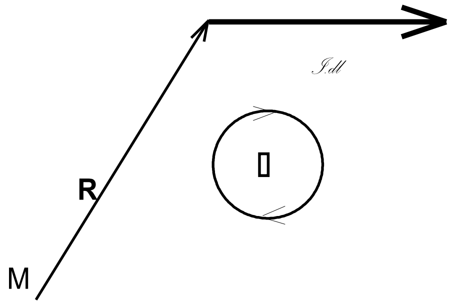
Pour l'orientation et les symétries, on a encore une loi similaire aux précédentes,



La forme complète est un peu plus compliquée :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\vec{R}\wedge(I\,\vec{dl})}{|R|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{(\vec{R})^{-1}\wedge(I\,\vec{dl})}{R}.$$

L'élément de courant $i.\vec{dl}$ et le vecteur $\vec{R}$ reliant le point M à l'élément de courant déterminent le plan de $d\vec{B}$.



Le produit extérieur est indispensable. En France, le gros des troupes physiciennes le confond avec le "*produit vectoriel*", qui, en France exclusivement, emprunte la même apparence d'écriture. Cette apparence d'identité d'écriture est due à un piratage purement français : les mystificateurs du "*produit vectoriel*" ont piraté l'écriture de l'algèbre extérieure, avec un "∧" pour se masquer dessous, au lieu de leur "×" originel[7]. Dans les pays anglo-saxons, le "*produit vectoriel*", "*cross-product*" a gardé son "×", et qui veut se repérer le peut encore. Chez nous, la privation de repères est la règle, et la confusion règne[8].

---

7 Presque tous s'y laissent prendre comme des bleus. Un exemple parmi tant d'autres : A. Dahan-Dalmedico & J. Peiffer ; *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*. Page 286, 4e ligne, Coll. Points, Seuil. 1986 Paris.

8 Dans les articles originaux d'Elie Cartan (*Oeuvres complètes*), pas trace de cette confusion. Mais elle ressurgit, accompagnée d'incompatibilités avec les unités physiques, dans un livre publié en fait par un élève à partir de notes de cours : *The Theory of Spinors*. Dover, d'après les *Leçons sur la théorie des spineurs*, de 1938, chez Hermann.

La forme de la loi de Biot et Savart appelle quelques simplifications. La projection anti-extérieure apporte-t-elle la solution ? $d\overset{\lrcorner}{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{(\vec{R})^{-1} \wedge (\overrightarrow{I\,dl})}{R}$. Mais on peut trouver le dénominateur disgracieux.

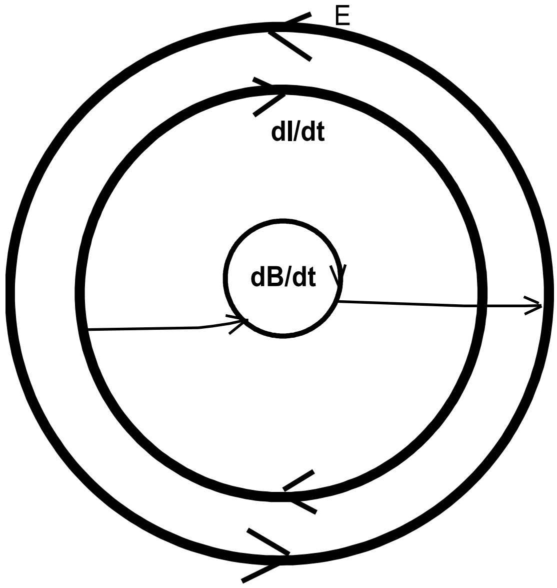
La simplification est plus convainquante, en exprimant cette loi sous forme vectorielle, avec le potentiel vecteur $\vec{A}$: $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\overrightarrow{I\,dl}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{\vec{v}\;dq}{R}$, et $\overset{\lrcorner}{B} = \overset{\lrcorner}{\mathrm{rot}}(\vec{A})$.

Enfin, on réunit les deux lois : Ampère-Laplace, et Biot et Savart, en exprimant l'énergie d'interaction de 2 particules chargées : $L_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}(1 - \frac{\vec{v}_1 . \vec{v}_2}{c^2})$. Exploitation qualitative : deux particules de même charge, se repoussent moins que selon la loi de Coulomb, si leur vitesses sont de même sens. Elles se repoussent plus que selon la loi de Coulomb, si leurs vitesses relatives sont de sens contraire. Le lecteur attentif aura remarqué combien les lois de l'électromagnétisme prennent la transformation de Galilée en porte-à-faux, et réclament bruyamment la transformation de Lorentz. On lève la contradiction galiléenne, en spécifiant que les vitesses en question sont celles des "particules extraordinaires", celles qui sont en mouvement global par rapport à la grande masse des autres; autrement dit par la minorité de particules mobiles, dans le repère lié à la majorité des atomes globalement tranquilles.

1 . 5 . Loi de l'induction électromagnétique

Pour exprimer la loi de l'induction mutuelle entre conducteurs, par exemple dans un transformateur, on a encore **un rond dans un rond.** Ils tournent en sens inverse (loi de Lenz).

Induction électromagnétique
entre deux spires concentriques.



On nomme $\delta\Gamma$ la spire électrique, bord de la surface Γ s'appuyant sur cette spire.

$d\vec{l}$ désigne l'élément de longueur sur $\delta\Gamma$.

$d\overset{\lrcorner}{S}$ désigne l'élément de surface sur Γ.

Expression générale : $\oint_{\delta\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = -\iint_{\Gamma} \frac{d\overset{\lrcorner}{B}}{dt}.d\overset{\lrcorner}{S}$.

Ce qui se prononce ainsi :

La circulation de $\vec{\mathbf{E}}$ le long de la spire, est l'opposé du flux de la dérivée de $\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}$ par rapport au temps, à travers une surface s'appuyant sur cette spire.

Cette loi devient bien plus sympathique, quand on l'exprime sous forme vectorielle :

$\oint_{\delta\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = -\oint_{\delta\Gamma} \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{dl}$ sous forme intégrale, d'où localement : $\vec{\mathbf{E}} = -\frac{d\vec{A}}{dt} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$

où $\boldsymbol{\varphi}$ est le potentiel scalaire de l'électrostatique. Le potentiel vecteur est un grand mal aimé de l'enseignement, du moins tant qu'on n'aborde pas la mécanique quantique, qui, elle, ne saurait s'en passer. Pourtant, regardez comme le lagrangien d'une particule dans un champ électromagnétique, est simple : $L = \frac{mv^2}{2} + q(\vec{A}.\vec{v} - \varphi)$. Cette expression simplifiée est valide pour des vitesses faibles devant la célérité de la lumière **c**. Pour toute trajectoire réelle, $S = \int_a^b L dt$ est stationnaire (minimale le plus souvent), et de plus, multiple entier du quantum d'action **h**, de Planck : 6,626 . 10^{-34} joule . seconde par tour.

2 . Quelles grandeurs physiques ont la nature géométrique de tourneurs ?

Toutes sans exception font intervenir la partie infinitésimale d'une rotation infinitésimale, donc une différenciation antisymétrique. Nous y reviendrons plus loin avec la définition du rotationnel.

2 . 1 . Tourneurs stricts :

Quotients de deux vecteurs, ils n'ont pas de longueur dans leur dimension physique.

2 . 1 . 1 . Vitesse angulaire, en rad/s **[$R.T^{-1}$]**

2 . 1 . 2 . Accélération angulaire, en rad/s^2 **[$R.T^{-2}$]**

2 . 1 . 3 . Champ magnétique ($\overset{\lrcorner}{B}$) **[$M.T^{-1}.Q^{-1}.R^{-1}$]**,

en joule-seconde, par mètre carré, par radian, et par coulomb, ou **tesla**.

2 . 2 . Tourneurs étendus :

Produits extérieurs de deux vecteurs, ils ont le carré de la longueur, dans leur dimension physique.

2 . 2 . 1 . Vitesse aréolaire, en m^2.rad/s **[$R.L^2.T^{-1}$]**

2 . 2 . 2 . Moment d'une force, ou d'un couple, en J/rad **[$M.L^2.T^{-2}.R^{-1}$]**

2 . 2 . 3 . Moment angulaire (et spin), en J.s/rad **[$M.L^2.T^{-1}.R^{-1}$]**

2 . 2 . 4 . Flux magnétique $\overset{\lrcorner}{\Phi}$(= circulation de $\vec{A}$ le long du bord de la surface) **[$M.L^2.T^{-1}.Q^{-1}.R^{-1}$]**

2 . 2 . 5 . Moment magnétique d'un aimant; d'une particule. **[$R.L^2.T^{-1}.Q$]**,

ou vitesse aréolaire de charge électrique, en radian-coulomb-mètres carrés par seconde.

2 . 3 . Densités volumiques de tourneurs étendus :

2 . 3 . 1 . Densité volumique de moment angulaire. **[$M.L^{-1}.T^{-1}.R^{-1}$]**

2 . 3 . 2 . Densité volumique de moment magnétique : le champ $\overset{\lrcorner}{H} = \overset{\lrcorner}{B}/\mu$: [$R.L^{-1}.T^{-1}.Q$].

c'est aussi une densité volumique de vitesse aréolaire de charge électrique, en radian-coulomb par mètre et par seconde.

2 . 4 . Cotourneurs étendus :

Produits extérieurs de deux covecteurs, ils ont le carré de la longueur en dénominateur.

2 . 4 . 1 . Vitesse anti-aréolaire : **[$R.L^{-2}.T^{-1}$]**

Pour mémoire ?

2 . 5 . Leurs relations entre eux ?

Opération	genre vitesse angulaire	*Multiplier par moment d'inertie* →	genre moment
	rotation		
Diviser par durée ↓	vitesse angulaire		moment angulaire
Diviser par durée ↓	accélération angulaire		moment de force ou couple

Opération	genre vitesse aréolaire	— *Multiplier par masse* →	genre moment
	vitesse aréolaire		moment angulaire
Diviser par durée ↓	accélération aréolaire		moment de force ou couple

Opération	genre vitesse aréolaire	*Multiplier par charge électrique* →	genre moment magnétique
	vitesse aréolaire		moment magnétique

Opération	genre moment	*Diviser par charge électrique* →	genre flux magnétique
	moment angulaire		Flux magnétique

On peut rassembler trois de ces tableaux partiels en un seul, plus compliqué :

Opération	genre flux ou f.é.m. — *multiplier par charge électrique* →	*Diviser par masse* →	*Multiplier par charge électrique* →	genre moment magnéti.
		densité de moment angulaire		champ $\vec{\mathbf{H}}$
× *par volume* ↓	flux magnétique	moment angulaire	vitesse aréolaire	moment magnétique
Diviser par durée ↓	variation temporelle de flux magnétique	moment de couple	accélération aréolaire	

Ce tableau-là n'est pas vraiment intéressant. Nous verrons mieux dans l'article consacré aux liens entre la dimension physique et le caractère tensoriel.

3 . Rappel : quelles sont les grandeurs physiques qui sont vectorielles ?

Toutes font intervenir une translation, généralement infinitésimale.
Presque toutes, dont toutes les fondamentales, ont la propriété que la longueur y intervient à la puissance 1.
A la puissance -2, pour les densités volumiques de vecteurs.

Déplacement	[L]	
Vitesse	$[L.T^{-1}]$	
Accélération	$[L.T^{-2}]$	
Impulsion (quantité de mouvement)	$[M.L.T^{-1}]$	
Force	$[M.L.T^{-2}]$	
Champ électrique	$[M.L.T^{-2}.Q^{-1}]$	($[L^{-2}.Q]$ pour le vecteur courant de déplacement)
Moment dipolaire électrostatique	[L.Q]	
Elément de courant	$[L.T^{-1}.Q]$	(C'est le $i.\vec{dl}$ figurant dans la loi de Laplace).
Potentiel magnétique ($\vec{\mathbf{A}}$)	$[M.L.T^{-1}.Q^{-1}]$	

On peut en faire le tableau synoptique :

Opération	genre champ	*multiplier par charge électrique* →	*Diviser par masse* →	*Multiplier par charge électrique* →	genre courant
			déplacement	Dipôle électrique	
Diviser par durée ↓	Potentiel magnétique	Impulsion	vitesse	élément de courant	
Diviser par durée ↓	Champ électrique	force	accélération		

Il est facile de voir que le lien entre une grandeur vectorielle et une grandeur tornatorielle, est soit la multiplication extérieure par un vecteur vitesse, ou par un rayon vecteur, soit la division extérieure par une vitesse, ou par un rayon vecteur. Quatre cas possibles, en tout.

4 . Rappel : interprétation géométrique des nombres complexes.

Entre 1798 et 1843, des mathématiciens et des astronomes ont remarqué, ou inventé les choses suivantes :

4 . 1 . Addition des nombres complexes : interprétation

L'addition des nombres complexes est isomorphe[9] à l'addition des vecteurs du plan.
Notamment, la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe peuvent représenter les composantes d'un vecteur, sur deux axes orthonormés.

4 . 2 . La multiplication des nombres complexes ?

La multiplication par ***1*** représente une identité.
La multiplication par un réel **r**, représente une homothétie centrée sur l'origine du repère.
La multiplication par ***i***, représente un quart de tour (à gauche).
La multiplication par $\mathbf{e^{i\theta}}$, représente une rotation d'angle θ, comptée dans le sens direct.
La multiplication par $\mathbf{re^{i\theta}}$, représente une rotation d'angle θ, comptée dans le sens direct, suivie d'une homothétie de rapport **r**.
Donc maintenant, les vecteurs de base, sont réinterprétés ainsi : ***1***, comme pas de rotation du tout,
i, comme quart de tour à gauche, dans le plan.

Et la table de multiplication s'écrit :

.	1	i
1	1	i
i	i	-1

(On remarque qu'adieu espace vectoriel de dimension 2 : cette table de multiplication définit un groupe fini à 1 générateur, et non 2.).

4 . 3. Ces deux interprétations sont fascinantes, mais contradictoires...

Alors que la première interprétation résiste à un changement d'axes, par exemple par une rotation de 45°, la seconde interprétation est pulvérisée par une telle transformation. Un vecteur de base de **C** représente tantôt un vecteur de base, tantôt pas de rotation et tantôt un quart de tour à gauche. Un complexe représentait tantôt un vecteur et tantôt une rotation ! Tantôt des mètres, et tantôt des radians !
La confusion perdure encore aujourd'hui, entre nombre et grandeur : un nombre complexe est un nombre. La multiplication de deux nombres est une opération interne. Un vecteur du plan est une grandeur. La multiplication de deux grandeurs, par exemple de deux vecteurs, est une opération externe. Mais les astronomes de l'époque ne sont pas avisés de cette contradiction sémantique. Leurs excuses : les nombres complexes **en tant que substituts sténographiques des outils d'algèbre linéaire propres au plan**, restent un puissant moyen de calcul pour la géométrie plane, et les fonctions analytiques sont fascinantes.
Inversement, en électricité, où ce sont les nombres complexes qui sont compétents, on aime bien tracer des diagrammes de Fresnel, et diverses extensions spécialisées : diagrammes de Kapp pour les transformateurs, de Behn-Eschenburg pour les alternateurs, de Blondel pour les moteurs, etc.

[9] Isomorphes : qui ont les mêmes propriétés algébriques.

Ainsi on a oublié d'élucider le mystère de la coïncidence entre le radian de la géométrie, qui est un quotient de deux longueurs égales et perpendiculaires, et le radian des phénomènes périodiques, qui est le quotient de deux grandeurs en quadrature de phase.

4 . 4. Image complexe du produit scalaire.

Transposant aux nombres complexes l'opération de produit scalaire, nous obtenons ceci :
Si $\mathbf{z} = \mathbf{r}e^{\mathbf{i\theta}}$, et son complexe conjugué $\bar{z} = \mathbf{r}e^{-\mathbf{i\theta}}$, alors : $r^2 = z.\bar{z}$
D'où le produit hermitien : $z.\bar{z}' = r.r'.e^{i(\theta-\theta')} = r.r'.(\cos(\theta-\theta') + i.\sin(\theta-\theta'))$
Commençons par ne voir que le membre de droite :
La partie réelle est bien l'image du produit scalaire : produit des modules, par le cosinus de l'angle. Autrement dit, produit contracté d'un vecteur, par la projection intérieure de l'autre vecteur.
La partie imaginaire est aussi l'image d'un produit, couramment appelé "*vectoriel*", et qui est encore moins vectoriel que le premier n'est scalaire. Ce produit d'un vecteur par la projection extérieure de l'autre, est donc l'aire algébrique de la surface du parallélogramme construit sur les deux vecteurs, orientée en rotation.
En électrotechnique, ce produit est couramment utilisé (sans, bien sûr, être nommé hermitien) : le produit de la tension par le courant, en alternatif, a pour partie réelle la puissance moyenne, ou puissance active, en watts. La partie imaginaire est la puissance réactive, en voltampères réactifs.
Il est temps de regarder aussi le membre de gauche. Très pertinent pour décrire un phénomène avec période et phase, là où les complexes sont compétents. Mais il n'a absolument rien à voir avec toute forme de produit tensoriel, symétrisé ou non, intérieur ou extérieur, de vecteurs. Il n'a absolument rien d'intrinsèque à des vecteurs. Pourquoi nos aînés ont-ils oublié de voir une telle évidence ?

5 . Hamilton a voulu faire mieux : dans l'espace tridimensionnel.

5 . 1 . Quand Hamilton s'emmêle (1805-1865).

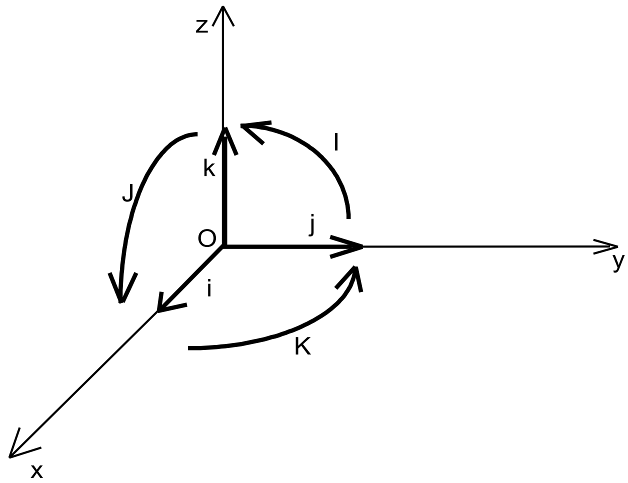
Faire quelque chose d'isomorphe à l'addition des vecteurs de l'espace, était très simple. Il voulait obtenir l'outil algébrique quotient de deux vecteurs. Tout le drame est que fasciné par l'interprétation confusioniste des complexes, il a voulu prolonger ce confusionnisme dans l'espace de dimension 3, agrandir de même la multiplication et la division, et obtenir à nouveau un corps[10]. Il a donc agrandi la confusion entre nombres (complexifiés), et grandeurs physiques. Il a ainsi inventé en 1843, une très belle algèbre, de nombres hypercomplexes, qu'il a appelé les *quaternions. Quater*__ parce qu'à la recherche du groupe des rotations de $\mathbf{E_3}$ (espace affine à $\mathbf{R}^3$), il s'est retrouvé devant un corps de dimension quatre.

A sa mort, Christophe Colomb croyait toujours avoir découvert la route des Indes. A sa mort, Hamilton prenait toujours que ses quaternions pour ce qu'ils ne sont pas : un outil de calcul des transformation de l'espace $\mathbf{E_3}$. Il a fallu attendre en gros E. Cartan (1869-1951) et ses spineurs, et R. Penrose et ses twistors, pour que des mathématiciens prennent conscience (avant tout le monde) de ce que c'est que la complexification d'un espace, et que ce n'est pas exactement la même chose que d'en augmenter le nombre de dimensions.

Dimension 4, donc quatre "*vecteurs*" de base, et non trois :

[10] En algèbre, on appelle corps un ensemble doté de deux lois de composition internes, et qui est un groupe commutatif pour la première. Privé de l'élément neutre de la première loi, il est aussi un groupe pour la seconde loi, qui de plus est distributive sur la première loi.
Un groupe est un ensemble sur lequel on a défini une loi de composition interne associative, présentant un élément neutre, et dont tout élément possède un inverse.

• Pas de rotation du tout
(c'est le ***1*** des complexes ordinaires),
• quart de tour en roulis
(c'est le ***i*** des complexes ordinaires),
• quart de tour en tangage
(c'est un nouvel imaginaire pur, ***j***),
• quart de tour en lacet
(c'est le troisième imaginaire pur, ***k***).



Et la table de multiplication des quaternions s'écrit :

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

(On remarque qu'adieu espace vectoriel de dimension 4 : cette table de multiplication définit un groupe fini à 2 générateurs : i et j, et pas plus, pas 3 ni 4. Car k = ij).

Tout quaternion non nul a un inverse : $\mathbf{x} \cdot \frac{\overline{x}}{|x|^2} = 1$, où $\overline{x}$ est le conjugué de **x**.

Les produits croisés sont **anti**commutatifs : **ij = -ji = k.** **jk = -kj = i.** **ki = -ik = j**.
En tant qu'**algèbre**, c'est à dire espace pré-vectoriel de **nombres**, muni d'une seconde opération associative et distributive, notée multiplicativement, ceci reste irréprochable (et très fécond). Tout le drame vient de ce que Hamilton et les mathématiciens britanniques, ne savaient pas distinguer un nombre d'un grandeur, ni une longueur d'une surface ou d'un angle, ni un vecteur d'une suite de nombres sans règle ni syntaxe. Ils n'ont pas suspecté combien est malsain le fait qu'une algèbre de nombres se permette de nous dicter subrepticement quelle serait donc la structure de l'espace géométrique de la physique... Les tout premiers soupçons britanniques n'arriveront qu'avec Clifford (1845-1879). Et seul Clerk Maxwell (1831-1879) pensera à la syntaxe des unités physiques, mais sans obtenir de résultats.

Ces produits de quaternions unitaires sont interprétables géométriquement selon ce double sens :
Opérer une rotation I sur une rotation J, donne une rotation K;
Opérer une rotation I sur le vecteur j, donne le vecteur k,
et une rotation J sur le vecteur i, donne le vecteur -k.
Mais il n'a jamais été géométriquement justifié, que multiplier le vecteur i par le vecteur j donne l'objet mal identifié k. Et dans quelle unité ? En mètres ? en mètres carrés ? en radians ?

Et sur la diagonale, les choses prennent aussi une tournure bizarre :

Opérer une rotation I sur une rotation I, donne une rotation -1, ou demi tour; parfait.
Multiplier le vecteur i par le vecteur i donne -1. Bizarre pour un vecteur, de générer l'opposé du produit scalaire. Mais cohérent avec les complexes, que multiplier i par $\overline{i}$, à la fois conjugué et inverse, donne 1.
Mais pourquoi **opérer une rotation I sur le vecteur i, donnerait l'objet mal identifié –1 ?** En 1873[11], W. K. Clifford avait déjà souligné que le produit d'un vecteur par un quaternion non perpendiculaire, n'a *aucun sens du tout*. Signification impossible. Unité physique impossible aussi, évidemment.

Les symétries sont aussi alarmantes : les rotations et les vecteurs ont des comportements opposés.

---

[11] William Kingdon Clifford. *Preliminary Sketch of Biquaternions*. Mathematical Papers. Réed. Chelsea. New York. 1968.

C'est Hamilton qui a inventé le "vecteur" ∇ (quaternion imaginaire pur). Il lui a servi à dériver une force d'un potentiel. Stokes (1819-1903)[12], et Tait (1831-1901)[13] en ont étendu l'usage à la dérivation d'un champ de vecteurs, produisant ce que Clerk Maxwell a proposé d'appeler *convergence* (opposé de la divergence) pour la partie scalaire, et **(*avec une grande défiance*)** *rotation* (rotationnel) pour la partie "*vectorielle*".

On voit qu'en dehors de leur beauté algébrique, les quaternions posent des problèmes d'interprétation insolubles, si on prétend les appliquer naïvement à la physique, comme l'ont fait Hamilton, Tait, et Mac Farlane[14]. Gibbs et Heaviside avaient mille fois raison, quand ils objectaient à Tait, que les quaternions ne conviennent pas du tout à la physique. L'ennui, est qu'eux non plus n'ont pas mis dans le mille, et que presque personne - sauf Einstein, Weyl et Cartan - n'a rien fait après eux. Les quaternions appliqués façon 19e siècle, amalgament tout et n'importe quoi, et leur descendant direct, le produit "*vectoriel*", ne pouvait faire mieux.

Les mathématiciens ont admiré l'audace de Hamilton, et la beauté du corps des quaternions. Ils ont un peu rechigné : la multiplication n'était plus commutative. Ils ont dû vérifier que c'était inévitable. On a généralement oublié de remarquer, que la multiplication des quaternions, est généralement incompatible avec toute projection sur un sous-espace vectoriel. Ce qui est chose grave, pour un espace vectoriel. Les quaternions, comme tout système de nombres complexes ou hypercomplexes, ne sont que pré-vectoriels.

5 . 2 . Le produit "*vectoriel*" : fausse solution à un vrai besoin.

Les physiciens ont rejeté les quaternions de Hamilton, à cause de la dimension quatre. Mais pris par l'urgence, prêts à accepter n'importe quoi, qui leur permette des calculs, ils en ont gardé les confusions entre vecteurs et rotations, entre nombre et grandeur. Ignorant les bivecteurs de Grassmann, et se fiant à la foi quaternionienne de son ami Tait, Clerk Maxwell a tacitement utilisé le produit "*vectoriel*" extrait des quaternions. Ce produit "vectoriel", et cette confusion, rendirent incompréhensibles un tiers de l'électromagnétisme et de la mécanique, avec d'absurdes lois chirales et de travers. Maxwell était conscient du problème, sans avoir de solution[15], et il est mort à 48 ans. Inconscients, les autres ont ignoré les mises en garde de Maxwell.

Incompatible avec la définition des vecteurs comme classes d'équivalence de bipoints, et même avec les axiomes des espaces vectoriels, par exemple avec la projection sur un sous-espace vectoriel, le "produit vectoriel" a été extrait (par restriction, ou projection) du produit de quaternions imaginaires purs.

La table de multiplication **INTERNE** s'écrit ainsi :

×	i	j	k
i	0	k	-j
j	-k	0	i
k	j	-i	0

Et elle se dessine de la même façon que pour les quaternions.

La grosse différence, est qu'il n'y a plus d'élément neutre, ni plus aucun inverse. Tandis qu'apparaissent des diviseurs de zéro. Le carré de tout "vecteur" est désormais nul : $\mathbf{i \times i = j \times j = k \times k = 0}$.
C'est ainsi que l'**on perd l'associativité**, qui était préservée en quaternions :
$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ (même résultat qu'en quaternions), mais $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = 0$.

12 Sir George Gabriel Stokes; *Dynamical Theory of Diffraction*. Camb. Phil. Trans. 1849.

13 Peter Guthrie Tait; *Elementary Treatise on Quaternions*. 1869. Thomson & Tait; *Natural Philosophy*. 1879.

14 Pis : ils ont prétendu représenter les tenseurs symétriques, tels que la perméabilité d'un diélectrique anisotrope, par une combinaison de quaternions.

15 Quand on étudie le traité de 1873 de Maxwell, on s'aperçoit qu'il était bien au courant de l'existence de grandeurs tensorielles du second ordre, comme les susceptibilités magnétique (introduit par S. D. Poisson en 1824, et démontré symétrique par W. Thomson en 1851), ou diélectrique, anisotropes, et autres grandeurs à neuf composantes. Mais il était convaincu de leur symétrie en physique : l'effet Hall n'a été découvert qu'en 1880, un an après la mort de Maxwell. Il semble n'avoir jamais envisagé de tenseur ni de matrice antisymétrique. Dommage !
Il fut par ailleurs l'inventeur de la méthode photoélastique d'analyse des contraintes, à l'âge de 19 ans.

Cette perte de l'associativité contredit directement l'intention sémantique initiale : *Tout ça c'est des vecteurs, **ils se valent tous**. Et leur ordre m'importe peu, il me suffit de changer le signe du résultat, quand je permute le multiplicateur et le multiplicande*. La non-associativité prouve la contradiction interne. Retenons donc que, en syntaxe cohérente, l'ordre des termes ne sera jamais libre : le tourneur strict agit sur le vecteur.

Le produit "*vectoriel*" implique deux résultats joliment absurdes :

En physiciens, donnons une longueur concrète à nos vecteurs. Si les vecteurs **i**, **j**, **k** sont de longueur 1 mètre, alors **k**, qui est le produit de **i** par **j**, est de longueur 1 m^2. D'autre part, **i** et **j** sont de longueur 100 cm, donc **k** est de longueur 10 000 cm^2. D'autre part, **j**, produit de **k** par **i**, est alors de longueur 1 m^3. Donc **i**, produit de **j** par **k**, est de longueur 1 m^5, ou 10^{10} cm^5. Etc... etc... Il n'y a aucune limite à l'absurdité.

D'autre part, rappelons-nous la définition des vecteurs comme classes d'équivalences de bipoints. Considérons donc ce trièdre, dans un miroir parallèle au plan xOz, **k** est conservé par la symétrie, mais **j** est retourné, donc **k**, produit "*vectoriel*" de **i** par **j**, est retourné en **-k**. Donc **k = -k**. On peut recommencer sur les deux autres vecteurs de base, et on peut étendre par combinaison linéaire.
Ce qui démontre que la composante vectorielle, du produit "*vectoriel*", est identiquement nulle.

Nous avons donc démontré, par deux fois, que le produit "*vectoriel*" est une opération invalide.

C'est avec cette algèbre contradictoire avec elle-même, que les physiciens du 19e siècle, ont cru résoudre mathématiquement, le problème des tourneurs, dont ils avaient besoin, et dont on a toujours besoin.[16]

Cette construction, ayant tourné le dos à la géométrie et à la physique, garde les défauts des complexes et des quaternions naïfs : impuissants à respecter les unités physiques, et l'exigence de covariance des lois physiques. Tout s'écroule au premier changement de repère non orthonormé. Incohérente avec les unités physique, et les vecteurs de base physiques, et incohérente avec les lois de la dérivation[17], cette construction confond les mètres avec les mètres carrés, et avec les angles, parce qu'elle refuse de distinguer les nombres des grandeurs. Physiquement, elle est désastreuse. Pédagogiquement, elle brave l'expérience, et le bon sens. Elle contredit et bafoue le cahier des charges de la physique. Le "*vecteur*" de physicien, jamais défini, a dévoré les lois de la dérivation. The tail wags the dog.

Pour simplifier ? Il suffit d'écouter les conversations entre professeurs d'électrotechnique (qui sont la population-prétexte du *pour simplifier*), pour avoir la preuve que seules de longues années de dressage, leur permettent de ne plus s'embrouiller entre main droite et main gauche, aux trois doigts prétendus indispensables, l'une pour un moteur, l'autre pour un générateur (ou l'inverse ?). *Pour simplifier !* Quel gâchis !

Pour représenter simplement les quarts-de-tour, présents dans quelques lois de la physique, les moyens mathématiques corrects existent au complet depuis 1888[18]. Weyl en 1918[19], puis Einstein en 1921[20], ont montré à quel point ils sont pratiques, et pas plus difficiles que le jargon *petit-nègre* inscrit au programme officiel.

L'algèbre pertinente est l'algèbre tensorielle. Ici, il nous suffit de son sous-ensemble, l'**algèbre extérieure**, créée par Hermann Grassmann en 1844, qui convient à tous les besoins de la physique élémentaire : elle a exactement la bonne structure, isomorphe à la classe de phénomènes physiques que nous étudions. Au 19e siècle, seul Grassmann flaire le piège de la confusion entre nombre et grandeur, et dénonce ce piège.

---

16 Au 20e siècle, on mettra des habits neufs à la vieille confusion, avec une "*dualité*" de physiciens, "de Hodge", en "ε_{jkl}", incompatible avec la dualité des algébristes, et toujours violant la covariance des lois physiques. Ils n'ont pas vu qu'il s'agit de "$i\varepsilon_{jkl}$", connexion avec **l'imaginaire** de la troisième direction, et non avec la troisième direction...

17 d'où ces cas de "*double produit vectoriel*" qu'on nous a asséné durant nos études, qui dissimulent presque toujours un calcul sur forme différentielle extérieure.

18 Gregorio Ricci-Curbastro ; *Delle derivazione covariante e contravariante*. Padova. 1888.

19 Hermann Weyl (1885-1955) ; *Space Time Matter*. 1918 Berlin. Réed Dover, New York 1952.

20 Albert Einstein. *Quatre conférences sur la théorie de la relativité.* Gauthier-Villars. Paris 1971.

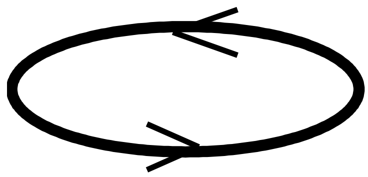
Encore restait-il à cesser d'oublier de compléter l'algèbre tensorielle abstraite, par l'algèbre des unités physiques.

6 . Un tourneur opère la partie infinitésimale d'une rotation infinitésimale.

Pour les rotations, on a besoin de l'opérateur de rotation infinitésimale, qui se compose de l'identité, et d'un tourneur strict, opérateur de différentiation antisymétrique, qui agit généralement sur des vecteurs.
Le tourneur physique comprend une dimension physique. Il sert pour tout ce qui accompagne les rotations, et pour tout ce qui se déduit directement des **rotations infinitésimales**, en physique : vitesse angulaire, accélération angulaire, moment angulaire, couple, champ magnétique B, dipôle magnétostatique.
Opérateur de **différentiation** antisymétrique, un tourneur n'a ni centre de rotation, ni axe de rotation, aucun sous-espace invariant (qui seraient indispensables pour décrire des rotations de solides[21]).
Un tourneur ne contient que les trois informations suivantes :

- sa direction de plan stable (sur lequel s'opère la projection),
- sa grandeur algébrique, décomposable en un quart de tour à droite ou à gauche, et un multiplicateur,
- une unité physique, contenant, sauf exception, la longueur à la puissance 2, ou 0 (ou -2 ?).

Sur $\mathbf{E_3}$, un tourneur a pour noyau (préimage de zéro) le sous-espace supplémentaire à son plan stable.

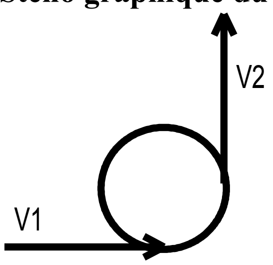


Connaissez-vous le jeu enfantin : pierre, ciseaux, papier, puits ? Le puits gagne contre la pierre ("la pierre tombe dans le puits"), mais les enfants préfèrent le geste le plus agressif et le plus viril. Et qu'en est-il des physiciens adultes, fanatiques de l'abus de bâtons flêchus ?

6. 1. Tourneur strict : opérateur associé à une rotation infinitésimale stricte,

caractérisé par l'absence apparente de la dimension **longueur.** Absence apparente seulement, car il s'agit d'une longueur divisée par une longueur perpendiculaire. Cela semble ne faire *rien*, mais ce *rien* n'est vrai qu'en repère orthonormé, et seulement à condition d'oublier le radian dans le monôme dimensionnel.

Sténo graphique du tourneur strict en relation avec deux vecteurs.



Le tourneur strict est quotient de deux vrais vecteurs V1 et V2. Il est donc homogène à un angle (multiplié éventuellement par d'autres grandeurs physiques). Ceci représente bien une loi comme celle de l'accélération centripète, produit de la vitesse angulaire par la vitesse périphérique.

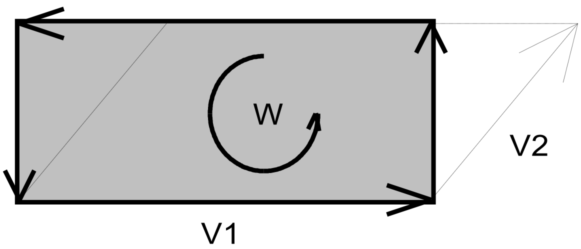
La sténo proposée est toujours située dans le plan stable, et sous-entend la projection préalable dans ce plan stable.

6 . 2 . Tourneur étendu (ou bivecteur) : opérateur d'inertie en rotation.

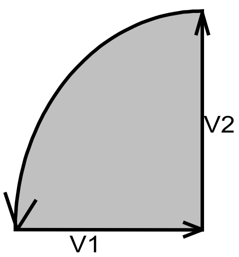
Est homogène à un tourneur strict, multiplié par le carré d'une longueur (une surface).

Sténo graphique du tourneur étendu, en relation avec deux vecteurs.

[21] Pour répondre aux besoins de la cinématique des solides indéformables, W. K. Clifford a défini ses biquaternions comme quotients de torseurs. Il restait à débarrasser lesdits torseurs et biquaternions des incohérences dimensionnelles, qui restaient héritées du 19e siècle. Cf. L. Schwartz; *Les tenseurs.* Hermann, 1975 Paris.



ou



Le tourneur étendu est produit extérieur de deux vecteurs vrais V1 et V2. On l'a représenté comme une surface grisée, car si les deux vecteurs étaient bien homogènes à des longueurs (multipliés éventuellement par d'autres grandeurs physiques), lui est bien homogène à une surface (multipliée éventuellement par d'autres grandeurs physiques).
Ceci représente bien une loi comme celle du moment angulaire, produit extérieur du rayon vecteur par l'impulsion. Ou le moment d'une force, produit extérieur de la force par le bras de levier.

6 . 3 . Densité volumique de tourneur étendu.

Exemple : le champ $\overset{\hookleftarrow}{\mathbf{H}}$, de dimension $[L^{-1}.T^{-1}. Q]$. Vérifions que ce tourneur $\overset{\hookleftarrow}{\mathbf{H}}$, est bien une densité volumique de quelque chose à préciser : $L^3. \overset{\hookleftarrow}{\mathbf{H}}$: $[L^2 . T^{-1} . Q]$.
C'est bien la dimension attendue d'un tourneur : vitesse aréolaire d'une charge électrique autour d'un axe.
Il existe d'autres combinaisons moins fréquentes : cotourneur, en $[L^{-2}]$, capacité de cotourneur, en $[L^1]$. En électromagnétisme, ceci peut encore se compliquer, par l'intervention de la célérité de la lumière **c**.

6 . 4 . Tables de multiplication EXTERNES :

Vecteur produit contracté d'un tourneur et d'un vecteur :

.	i	j	k
I	0	k	-j
J	-k	0	i
K	j	-i	0

où i, j, k sont les vecteurs unitaires orthonormaux, K, I, J, sont les rotations unitaires (autrement dit, quarts de tour) dans les trois plans de base.

Tourneur produit extérieur de deux vecteurs :

$\wedge$	i	j	k
i	0	Ku^2	$-Ju^2$
j	$-Ku^2$	0	Iu^2
k	Ju^2	$-Iu^2$	0

où i, j, k sont les vecteurs unitaires orthonormaux, K, I, J, sont les rotations unitaires, quarts de tour dans les trois plans de base, et u l'unité de longueur.

6 . 5 . Associativité : rang trois.

Produit extérieur d'un tourneur et d'un vecteur = tenseur antisymétrique de rang trois. Résultat nul en dimension deux. Une seule composante libre en dimension trois, sur une base orthonormale :
permutations paires : $i\wedge j\wedge k = j\wedge k\wedge i = k\wedge i\wedge j = u^3.V$ (volume orienté dans l'ordre des vecteurs de base).
Impaires : $k\wedge j\wedge i = i\wedge k\wedge j = j\wedge i\wedge k = -u^3.V$ (volume orienté dans l'ordre inverse des vecteurs de base).
Avec V : unité de base, sans dimension, de tenseur antisymétrique de rang trois (ici sur l'espace $\mathbf{R}^3$).

Le produit extérieur de vecteurs non indépendants est toujours nul. Donc au delà du rang trois sur un espace de dimension 3, ni au delà du rang 4 sur un espace de dimension 4, tout produit extérieur est nul.

6 . 6 . Une grandeur tornatorielle, c'est un tourneur, éventuellement multiplié par d'autres unités physiques non géométriques.

Nous séparons les dimensions physiques en deux parties :

Une partie géométrique, contenant la longueur, donc la dimension du tourneur, usuellement $[L^2]$ ou $[L^0]$, et **le restant**, qui peut contenir une unité de masse, une ou plusieurs fois l'unité de temps, l'unité de charge électrique, éventuellement le Kelvin (rarement un volume ou son inverse, ou c, célérité de la lumière). Nous faisons donc une fois pour toutes, les mathématiques de la partie géométrique du tourneur.

7 . Trois traditions.

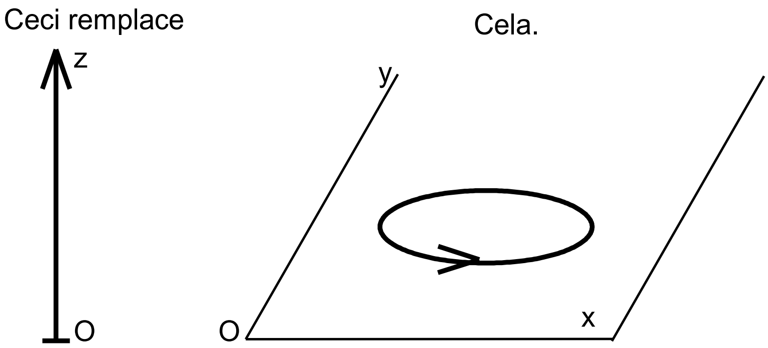
7 . 1 . Tradition tout-vecteur : Hamilton (1843), Clerk Maxwell (1873), Heaviside (1893)

Cette façon cumule les deux erreurs majeures :

C'est un bâton, et ça tient sur une droite.

Ça ne tourne plus, ça court le long de la droite.

(Il est vrai que sur un arbre lisse, une poulie folle peut coulisser ou tourner, ou les deux, et qu'à l'époque, on distinguait mal entre la physique, et la cinématique du solide indéformable.)



Cette tradition est celle de l'enseignement technique français, et de toute l'électrotechnique.

Puis, pour justifier le *tout-vecteur*, ils ont propagandé des "*masses magnétiques*" (monopôles magnétiques) comme théorie du ferromagnétisme [22]...

Descendance oubliée : les *dyadics* de Josiah Willard Gibbs (1839-1903).

J. W. Gibbs a bien eu l'idée de désigner les tenseurs de rang 2 - ou leurs matrices, on ne savait pas très bien - sous le nom de "*dyadics*", tout en conservant intégralement les masques traditionnels de "*vecteurs*" et de "*produit vectoriel*" partout où la tradition de l'époque en mettait (environ 1881-1884, diffusion restreinte)[23]. On peut encore rencontrer des *dyadics* dans la littérature américaine.

"*Frenchman, Germans, and Italians, urging their respective substitutes for quaternions, added to the din. By the second decade of the twentieth century there was a babel of conflicting vector algebras, each fluently spoken only by its inventor and a few chosen disciples.*"[24]

---

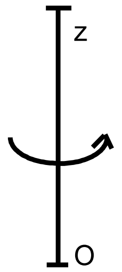
[22] A. Nouguier. *Précis de la théorie du magnétisme et de l'électricité.* Librairie polytechnique Béranger. Paris 1905. L. Pastouriaux, A. Varoquaux, M. Bellier, A. Galichon. *Electricité Industrielle. T. 1 : Lois générales.* Delagrave. Paris 1957.

[23] En ingénierie, on appelle cela de la programmation *par verrues*. "*Ce nouveau module réclamé par le marché, ne touchera en rien à ceux écrits par les précédents programmeurs. Ils m'ont déjà coûté assez cher à déverminer ! Vous ajouterez seulement un point d'entrée vers la nouvelle routine, et un point de retour. Vous ne vous mêlerez d'aucune espèce de remise en ordre, ni de rationalisation, ni d'unification structurelle, ni de réutilisabilité des composants. On n'a pas l'argent, on n'a pas le temps, ni la formation professionnelle pour. Et quinze programmeurs après vous rajouteront d'autres verrues individualistes.*" Chez les physiciens, on mathématise par verrues.

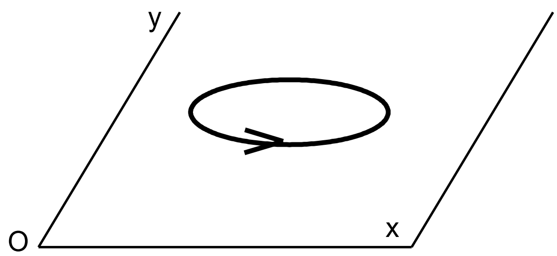
[24] Eric Temple Bell; *The Development of Mathematics.* 1940. Réed. Dover, New York 1992.

7 . 2 . Tradition universitaire minoritaire (depuis Pierre Curie ? 1894 ?).
Au moins, ça tourne, dans le même sens que le phénomène physique.
Une seule erreur : c'est un bâton, dit "vecteur axial".

Ceci remplace



Cela.



Il existait un élément de cohérence, limitée exclusivement à un espace de dimension 3 : la fibre ainsi exhibée, munie du même sens de rotation que le plan stable, en est sa duale. On s'empêchait de traiter simplement les problèmes de dimension 2. On s'empêchait de passer facilement aux dimensions 4 et plus.

Et on appela ce bâton tournant "*vecteur axial*", sans se préoccuper de la contradiction : vecteur ou pas vecteur ? Et faute d'avoir pensé à achever le travail d'algébriste, on conserva le produit "*vectoriel*", qu'on venait de dénoncer comme trompeur. Et si ce que l'on dessinait avait bien les bonnes symétries, ce que l'on calculait en avait toujours de fausses, qu'il fallait corriger après coup, à l'instinct, car on le calculait exactement comme pour un vecteur. A tort.

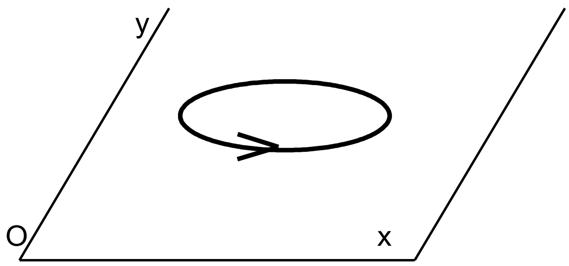
Ecrire les équations de Maxwell dans ce système semi-cohérent, était un pont aux ânes, que les auteurs ne franchissaient pas tous indemnes. Si Denis-Papin et Kaufmann[25] déjouaient le piège laissé tendu par la notation de Gibbs, d'autres y tombaient[26].

Moins scrupuleux, d'autres, *pour simplifier*, enseignaient par défaut la version forte de la confusion (tout-vecteur), mais en cas de public plus perspicace, plus interrogatif, se dédouanaient par la version faible : nuance axiale. Puis on s'embrouillait, et on sautait de cheval au milieu du gué, en invoquant la *profondeur* des algèbres de Lie.

7 . 3 . Manière correcte : H. Grassmann 1844, G. Peano 1888, H. Weyl 1918, A. Einstein 1921, E. Cartan, J. Barbotte 1948.
Ça tourne,
C'est dans un plan.

Les coordonnées s'écrivent donc avec **deux** rangs d'indices, alors qu'un seul rang convient aux vecteurs. Un vecteur tient sur une droite. Un tourneur tient sur un plan.

Rien ne remplace cela, dans le plan de rotation.

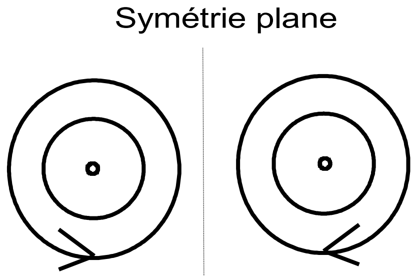


8 . Symétries comparées.

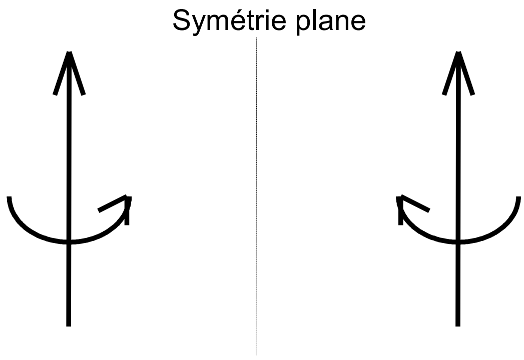
[25] M. Denis-Papin & A. Kaufmann; *Cours de calcul tensoriel appliqué*. Albin Michel. Paris 1966.
[26] Pérez & Saint Cricq-Chéry; *Relativité et quantification*, page 109. Masson. Paris 1986.

Le vecteur, même nuancé par l'adjectif "axial" - d'ailleurs à contresens : aucun axe n'existe - conduisait invariablement à une erreur de symétrie, dictée par l'outil mathématique inadéquat. Au contraire du tourneur, qui dans chaque cas a exactement le comportement exigé par sa signification.

Deux cas de "vecteur" parallèle au plan de symétrie : le vecteur est conservé, tandis que sa signification est retournée par la symétrie !

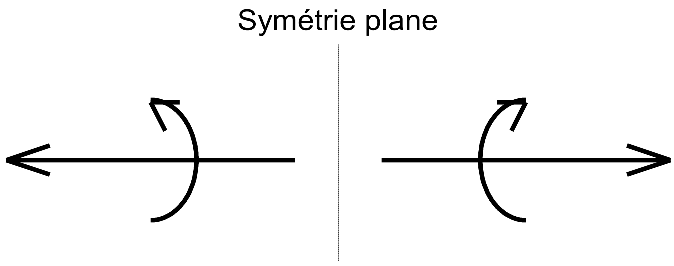


Le tourneur est retourné: son plan est perpendiculaire au plan de
Le vecteur est conservé: son axe est parallèle au plan de symét



Le tourneur est retourné: son plan est perpendiculaire au plan de symétrie.
Le vecteur est conservé: son axe est parallèle au plan de symétrie.

Un cas où le "vecteur" est perpendiculaire au plan de symétrie. Il est retourné, tandis que sa signification est conservée par la symétrie !



.e tourneur est conservé: son plan est parallèle au plan de symétrie.
.e vecteur est retourné: son axe est perpendiculaire au plan de symétrie

L'enseignement du vecteur-à-la-place-de-la-rotation, a joué un autre tour pendable aux physiciens qui y ont cru : on leur a interdit les symétries, puisque le produit "*vectoriel*" n'y résiste pas. Cela les a dépouillés de la conscience de l'utilité élémentaire des symétries, et ça les a embrouillés d'une chiralité mystique qui n'a rien à voir avec les lois physiques, n'étant produite que par un choix erroné d'outil mathématique, voici 151 ans.

La symétrie, ça sert d'abord à ramener de nouveaux problèmes, à des problèmes déjà connus, et résolus. On gagne donc du temps.

Ça sert aussi à appliquer le principe de Pierre Curie : *L'effet est au moins aussi symétrique que la cause. Réciproquement, c'est la dissymétrie qui crée le phénomène.* Ce principe est trop puissant pour qu'on puisse se permettre de s'en passer. Il permet notamment de prédire des nullités, ou des égalités, de certaines composantes. Par exemple la présence ou l'absence de piézoélectricité.

9 . Coordonnées d'un tourneur, en repère orthonormé.

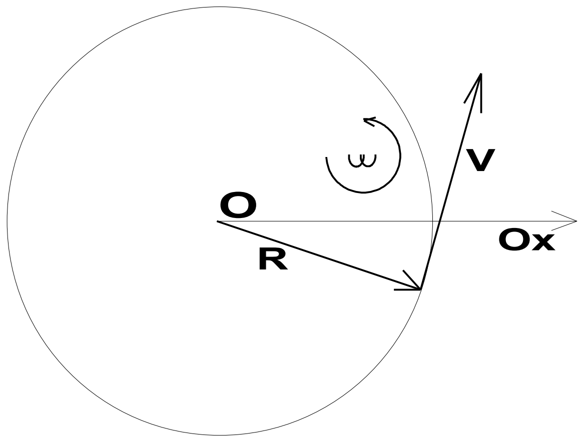
9 . 1 . Cas du tourneur strict, quotient.

Nous menons le calcul sur l'exemple de la rotation uniforme, avec la relation : $\vec{V} = \overset{\lrcorner}{\omega}.\vec{R}$, où $\overset{\lrcorner}{\omega}$ relie deux vecteurs orthogonaux.

9 . 2. Calcul rigoureux.

Feignons d'ignorer tout du calcul matriciel, des représentations matricielles, mais en sachant tout de même la trigonométrie.

Désignons par θ l'angle (quelconque) de $\vec{R}$ avec l'axe des x. Alors les coordonnées de $\vec{R}$ sont R cos θ, et R sin θ (et zéro, si l'on s'encombre dès maintenant de la 3e dimension).
Tandis que les coordonnées de $\vec{V}$ sont :
V cos(θ+ π/2) et V sin (θ+ π/2)
(signe +, car rotation dans le sens direct, pour des axes orientés de même). Exprimons les quatre quotients.



Mimant l'ignorance totale, nous allons même ignorer qu'il est plus pratique de les ranger en tableau carré. Rangeons donc provisoirement en ligne les quatre *influences-d'une-coordonnée-de-R-sur-une-coordonnée-de-V* (les signes affectant des valeurs absolues, dépendent évidemment du signe de la rotation, par rapport à l'orientation des axes de coordonnées) :

de Rx vers Vx	de Rx vers Vy	de Ry vers Vx	de Ry vers Vy
V/R tg θ	V/R	-V/R	V/R cotg θ

Premier mouvement de panique : Ces coefficients sont trop compliqués !
Mais remarquons que ces coefficients sont deux à deux redondants, et que si nous les appliquons simultanément, nous obtiendrons à chaque instant le double de la vitesse $\vec{V}$.

Vx = ½ V/R (+ Rx tgθ - Ry)
Vy = ½ V/R (+ Rx + Ry cotgθ)

Nous avons intérêt à scinder ces coefficients en deux groupes, dont chacun est suffisant :

de Rx vers Vx	de Rx vers Vy	de Ry vers Vx	de Ry vers Vy
0	V/R	-V/R	0
V/R tg θ	0	0	V/R cotg θ

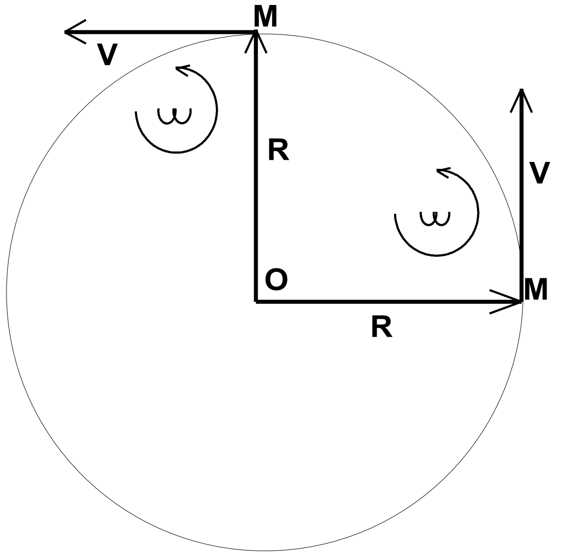
Or, seul le groupe de la première ligne a la propriété d'être **invariant envers θ**. Lui seul donc est digne de représenter l'être physique "vitesse angulaire de rotation", qui lui, est un invariant quel que soit θ. Le second groupe conviendrait pour décrire une oscillation harmonique droite. Ici ce n'est qu'une fausse solution, proposée par notre mathématisation : un groupe non faux, mais sans intérêt, et affligé de discontinuités rédhibitoires pour θ = π/2 + kπ.

Une autre façon équivalente, d'apparence plus rigoureuse, est de faire la moyenne des coefficients trouvés, en faisant varier θ de 0 à 2π. Les termes en tgθ et cotgθ s'annulent en moyenne. Ce qu'il fallait démontrer.

Il ne reste plus au lecteur, qu'à se convaincre de l'intérêt de disposer ces quatre coefficients retenus, sous la forme d'un tableau carré, au lieu de les entasser en ligne.

9 . 3 . Calcul simplifié.

Il nous suffit de sélectionner deux positions du vecteur $\vec{\mathbf{R}} = \vec{OM}$.



Il est judicieux de prendre deux positions orthogonales entre elles : successivement $\vec{OM}$ selon l'axe Ox, puis selon l'axe Oy, et de résoudre le système de 2 équations. On pose les vecteurs sous forme colonne.

$R^1{}_1 = R$

$R^1{}_2 = 0$ (1ère coordonnée du 2e vecteur)

$R^2{}_1 = 0$ (2ème coordonnée du 1er vecteur)

$R^2{}_2 = R$

$V^1{}_1 = 0$

$V^1{}_2 = -V$ (1ère coordonnée du 2e vecteur)

$V^2{}_1 = V$ (2ème coordonnée du 1er vecteur)

$V^2{}_2 = 0$

On résout le système suivant, où les coordonnées de $\overset{\lrcorner}{\omega}$ sont les inconnues :

$$\omega\begin{pmatrix} .. & .. \\ .. & .. \end{pmatrix}.R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \omega R\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (produit matriciel, ordinaire)

D'où la solution : (coordonnées de $\overset{\lrcorner}{\omega}$) = $\omega\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

$\omega^1{}_1 = 0$

$\omega^1{}_2 = -1$ (1ère coordonnée du 2e vecteur)

$\omega^2{}_1 = 1$ (2ème coordonnée du 1er vecteur)

$\omega^2{}_2 = 0$

On remarque qu'en repère orthonormal, les coordonnées mixtes se comportent comme des coordonnées homogènes, et sont sagement antisymétriques. Il ne reste bien qu'une seule coordonnée stricte non nulle. En repère non orthonormal, il faut revenir à la discipline de base, et n'antisymétriser que des coordonnées homogènes : entièrement covariantes, ou entièrement contravariantes. Nous y reviendrons.
Mais attention à un oubli qui pourrait nous coûter cher ultérieurement : le tourneur $\overset{\lrcorner}{\omega}$ ne caractérise la rotation que du seul point de vue différentiel. A lui seul, il perd une constante d'intégration capitale : le sous-espace invariant. C'est à dire le centre de rotation dans le plan, ou l'axe de rotation dans l'espace $\mathbf{R}^3$.
Souvenons-nous en quand nous étudierons le moment angulaire.

Nous suggérons de regarder ce tableau $\omega^i{}_j$, comme un tableau de dérivées partielles des coordonnées de $\vec{\mathbf{V}}$ par rapport aux coordonnées de $\vec{\mathbf{R}}$. Comme tout tableau, il est à double entrée : selon l'origine, et selon l'image :

$$\omega^i{}_j = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_x}{\partial R_x} & \dfrac{\partial V_x}{\partial R_y} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial R_x} & \dfrac{\partial V_y}{\partial R_x} \end{pmatrix}$$

Et ainsi qu'on l'a vu, on ne retient que les termes dont la moyenne est non nulle, quand le nombre de rotations tend vers l'infini.

Dans tous les cas, on peut traiter le problème sous forme plane : il suffit de déterminer son plan stable, et projeter ce qu'il faut, vers le plan stable.

9 . 4 . Cas du tourneur étendu, produit extérieur.

Faire le produit tensoriel[27], et retrancher le transposé : $\overset{\lrcorner}{U} = \vec{V} \wedge \vec{W} = \vec{V} \otimes \vec{W} - \vec{W} \otimes \vec{V}$, ou en coordonnées : $U_{ij} = V_i W_j - V_j V_i$.

Déroulons $\overset{\lrcorner}{U}$ à deux dimensions : $U_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & v_x w_y - w_x v_y \\ w_x v_y - v_x w_y & 0 \end{pmatrix}$

Déroulons $\overset{\lrcorner}{U}$ à trois dimensions : $U_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & v_x w_y - w_x v_y & v_x w_z - w_x v_z \\ w_x v_y - v_x w_y & 0 & v_y w_z - w_y v_z \\ w_x v_z - v_x w_z & w_y v_z - v_y w_z & 0 \end{pmatrix}$

On a donné l'exemple entièrement en coordonnées covariantes. La définition est similaire, sans surprises, en coordonnées contravariantes. Elle ne serait valide en coordonnées mixtes, qu'à condition que le repère soit orthonormé.

9 . 5 . Exercice. Utiliser le produit extérieur en quotient :

Montrer que $\vec{\mathbf{v}} = \overset{\lrcorner}{\omega}.\vec{\mathbf{R}}$ implique : $\overset{\lrcorner}{\omega} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{v}}{|R|^2}$ (La réciproque est fausse, sauf si $\vec{R}.\vec{v} = 0$).

Cela montre que comme en algèbre de quaternions, on sait calculer des "inverses", plus exactement des duaux, mais désormais, on respecte la covariance des lois physiques :

A tout vecteur non nul, on peut associer le covecteur dual ("inverse sur la même droite") : $\vec{R}^* = \dfrac{\vec{R}}{|R|^2}$.

A tout tourneur, on peut associer le cotourneur dual ("inverse dans le plan stable") : $\overset{\lrcorner}{\omega}^* = -\dfrac{\overset{\lrcorner}{\omega}}{|\omega|^2}$.

10 . Syntaxe algébrique et géométrique.

La règle de grammaire dimensionnelle des vecteurs et des tourneurs, oblige à un parfait isomorphisme avec la bonne règle physique. Une grammaire stricte est un garde-fou, indispensable aux physiciens. Pas seulement aux informaticiens (*Don't shoot yourself in the foot any more !*)...

---

[27] Produit tensoriel: On multiplie chaque composante de l'un par chaque composante de l'autre. Contrairement au produit scalaire, on n'additionne ni ne contracte rien. On garde les n² composantes distinctes.

Comment corriger les anciens produits *"vectoriels"* de vos manuels.

Vous devez corriger vos manuels, loi par loi, des bévues qui, *pour simplifier*, les obscurcissent. Concernant les anciens produits *"vectoriels"*, on ne rencontre en pratique que quatre cas.

Pour trois d'entre eux, la règle de grammaire, est de repérer dans une ancienne formule, *qui* au juste est un tourneur. On trouve toujours *un seul* tourneur, en formule avec *deux* vecteurs[28]. Il suffit souvent, mais pas toujours, de regarder son monôme dimensionnel, pour démasquer une grandeur physique mystérieuse.

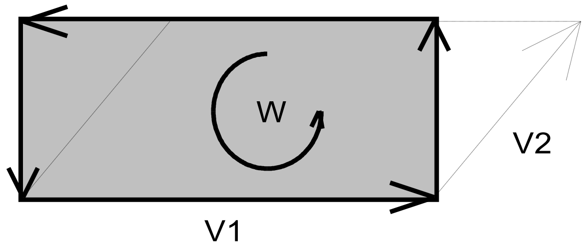
Nous verrons plus loin le quatrième cas, avec le théorème d'Ampère.

Pour la clarté, nous écrivons les produits "vectoriels" à l'anglo-saxonne (à la façon du 19e siècle), avec une croix oblique ($\times$), au lieu du V renversé ($\wedge$), que nous réservons au seul produit extérieur.

10 . 1 . Cas 1 : Produit extérieur de vecteurs = tourneur étendu.

Presque la même écriture, en apparence. Pas la même signification. On garde la liberté d'utiliser l'anticommutativité, pour éliminer le signe + ou - qui nous semble disgracieux.

C'est donc une loi en :

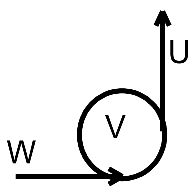


10 . 2 . Cas 2 : Un tourneur multiplie un vecteur = un vecteur perpendiculaire.

Pas de liberté pour le choix du signe : le tourneur est à gauche, le vecteur à droite. Ce serait l'inverse pour un covecteur. L'anticommutativité semble bien absurde : on n'anticommute que des êtres de même nature.

$\overset{\lrcorner}{\mathbf{V}}.\overrightarrow{\mathbf{W}} = \overrightarrow{\mathbf{U}}$.

C'est donc une loi en :



Une formule : $\dfrac{\vec{U}\times\vec{V}}{|U|^2} = \vec{W}$, avec $\overset{\lrcorner}{U}$ tourneur, ce qui implique $\vec{V}.\vec{W} = 0$, se traduit par : $\overset{\lrcorner}{U}.\vec{W} = -\vec{V}$.

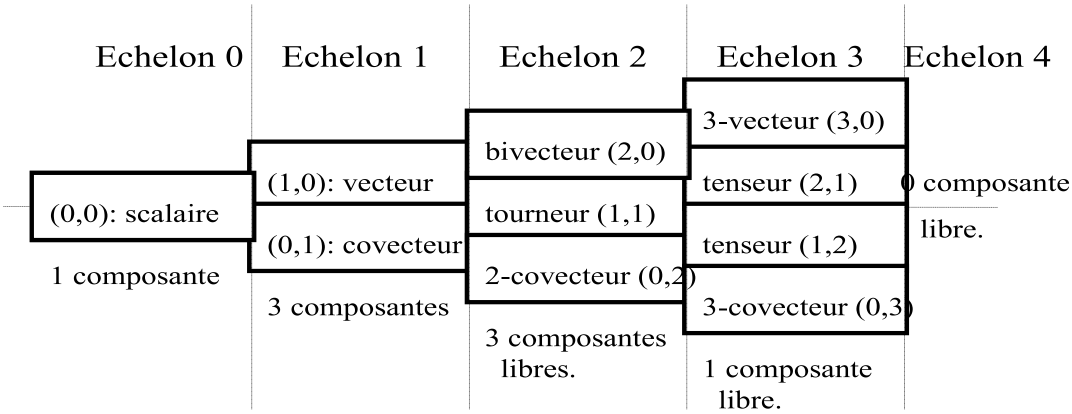
10 . 3 . Cas 3 : Quotient extérieur de vecteurs = tourneur strict.

Une formule : $\dfrac{\vec{U}\times\vec{V}}{|U|^2} = \vec{W}$, dans le cas où $\overset{\lrcorner}{W}$ est le tourneur, se traduit par : $\dfrac{\vec{U}\wedge\vec{V}}{|U|^2} = \overset{\lrcorner}{W}$

11. Position dans le livret de famille.

[28] Le cas, théoriquement possible, de trois tourneurs, et d'aucun vecteur, ne joue aucun rôle notable.

Espace de dimension 3. Les multivecteurs non nuls.



Les tourneurs stricts, et les tourneurs étendus (bivecteurs), ont la même symétrie. Ce sont tous des tenseurs antisymétriques de rang 2. Les vecteurs et les covecteurs, sont les tenseurs de rang 1. Les scalaires, tels que la température, sont les tenseurs de rang 0 (zéro). L'enseignement de la physique élémentaire n'a pas besoin d'autres tenseurs de rang 2, autres qu'antisymétriques, excepté pour le moment d'inertie d'un solide.

11 . 1 . Difficulté réelle : moment angulaire et moment d'inertie.

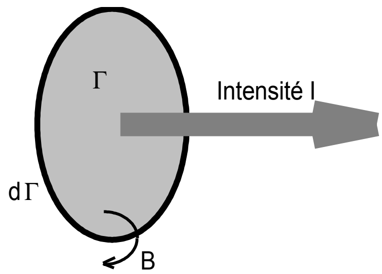
$\overset{\lrcorner}{\sigma} = \vec{\mathbf{R}} \wedge (m\vec{\mathbf{v}}) = m\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}^2}.\overset{\lrcorner}{\omega}$ pour un point matériel.

$\overset{\lrcorner}{\sigma} = (M\overset{\leftrightarrow}{R^2} + \overset{\leftrightarrow}{In}).\overset{\lrcorner}{\omega}$ pour un solide.

$\overset{\lrcorner}{\sigma}$ et $\overset{\lrcorner}{\omega}$ sont des tourneurs, mais $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{In}}$ est un tenseur symétrique, représentant l'inertie autour du centre d'inertie. **M** est la masse totale du solide, $\vec{\mathbf{R}}$ le vecteur distance de l'axe de rotation au centre d'inertie du solide (vecteur perpendiculaire à cet axe). $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}^2}$, $\mathbf{m}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}^2}$, $\mathbf{M}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}^2}$ sont aussi de nature tensorielle $\vec{\mathbf{R}} \otimes \vec{\mathbf{R}}$. Si par malchance, $\vec{\mathbf{R}}$ est non nul, ou si aucun des axes principaux de $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{In}}$ n'est contenu dans le plan principal du tourneur $\overset{\lrcorner}{\omega}$, votre solide vibre ! Autrement dit le moment angulaire $\overset{\lrcorner}{\sigma}$ ne garde pas une orientation constante au cours de la rotation, mais précesse autour de l'axe de rotation. Leonhard Euler donna la première expression des axes principaux d'inertie, et des moments autour des axes principaux, vers 1760. Sténo graphique ? Dessiner le plan de $\overset{\lrcorner}{\omega}$, et l'ellipsoïde d'inertie. On n'échappe pas à la difficulté principale, liée au dessin de l'ellipsoïde. Il n'existe pas ici de sténo graphique plane. On retrouve le même problème pour un solide au magnétisme anisotrope, où $\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}$ et $\overset{\lrcorner}{\mathbf{H}}$ ne sont pas nécessairement coplanaires.

11 . 2 . Difficulté peu utile : le théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère énonce l'égalité de deux tenseurs antisymétriques de rang trois dans un espace $\mathbf{R}^3$. Il n'ont donc qu'une seule composante stricte ("pseudo-scalaire" : faux scalaire).



On nomme dΓ le bord de la surface Γ, et I_Γ l'intensité à travers la surface Γ.

Le signe ∧ désigne bien un produit extérieur, ici d'un tenseur de rang deux par un tenseur de rang un.

$d\vec{s}$ désigne l'élément de longueur sur dΓ.

$$\oint_{d\Gamma} \overset{\lrcorner}{B} \wedge d\vec{s} = \mu_0 I_\Gamma. \qquad \mathbf{[M.L.T^{-1}.Q^{-1}]}$$

Il n'existe pas ici de sténo graphique plane. De part et d'autre du signe = (égale), le problème est vraiment tridimensionnel, et des deux côtés, l'orientation de la surface, et de son bord sont arbitraires.

11 . 3 . Le rotationnel, ou dérivée extérieure d'un champ tensoriel (d'ordre non nul).

Dérivée extérieure signifie : dérivée covariante antisymétrisée.

11 . 3 . 1 . Cas historique : rotationnel d'un champ vectoriel : $\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}} = \overset{\lrcorner}{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathbf{A}} = B_{ij} dx^i \wedge dx^j$.

Dans ce cas, il n'y a qu'une seule permutation possible sur la base, donc $B_{ij} = A_{i,j} - A_{j,i}$.

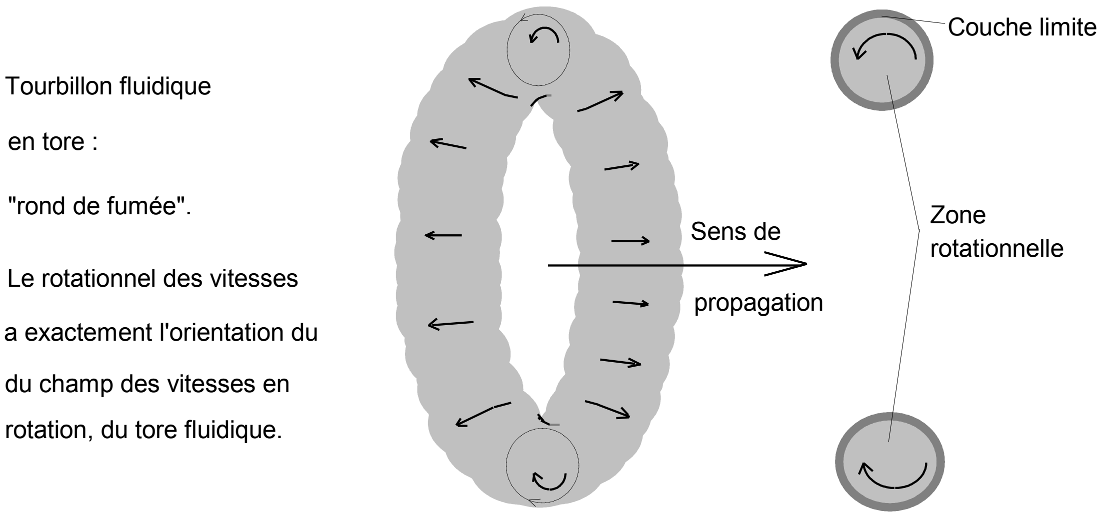
L'antisymétrie ne garde son caractère invariant qu'en coordonnées homogènes, toutes covariantes dans le cas général[29] (toutes contravariantes aussi, en espace métrique; les coordonnées mixtes ne deviennent tolérables que si on se limite aux repères orthonormés, limitation qui a produit de dangereuses habitudes confusionnistes).

Définition initiale pratique : prenez un solide indéformable, en rotation. Faîtes l'opération rotationnel sur son champ des vitesses instantanées : en tout point, vous trouvez une grandeur constante, qui est la vitesse de rotation instantanée du solide, autour de son centre de rotation instantanée.

$\overset{\lrcorner}{\mathrm{rot}}\ \vec{V} = \overset{\lrcorner}{\omega}$, de coordonnées $\omega^i{}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{pmatrix}$

Ceci justifie que Stokes et Tait aient inventé l'opération **rotationnel**, lui donnant à peu près ce nom.

Le rotationnel est indispensable en mécanique des fluides. Le demi-rotationnel est aussi appelé le tourbillon. La dérivée covariante complète, est donc la somme du tenseur tourbillon, antisymétrique, et du tenseur de déformation, symétrique. Le rotationnel permet de décrire avec naturel les "ronds de fumée", les tourbillons, les portances sur les profils d'ailes ou de voiles, ou sur les rotors de Flettner. Au temps où l'on assimilait le rotationnel à un vecteur, ce naturel disparaissait, et les figures s'encombraient très bizarrement.



Cruelle, la comparaison avec l'original : figure 40 - 15, du cours de Feynman, Leighton et Sands, regardez leurs lignes de tourbillon. Quel gâchis, ce respect des traditions absurdes !

11 . 3 . 2 . Cas général de la dérivation extérieure, en dimension n.

Soit une p-forme différentielle ($1 \leq p \leq n$) : $\omega = \mathbf{A}_{k_1 \ldots k_p} dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p}$, sa dérivée extérieure $d\omega$ s'écrit :

$$d\omega = \frac{\partial \mathbf{A}_{k_1 \ldots k_p}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p} = (-1)^p \frac{\partial \mathbf{A}_{k_1 \ldots k_p}}{\partial x^{j_{p+1}}} dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p} \wedge dx^{k_{p+1}}.$$

Le lemme de Poincaré[30] établit que : $d(d\omega) = 0$. Donc le rotationnel d'un rotationnel, est identiquement nul.

[29] Léon Brillouin ; *Les tenseurs en mécanique et en électricité.* Masson. Paris 1938.

[30] David Lovelock & Hanno Rund; *Tensors, Differential Forms and Variational Principles.* Dover, New York 1989.

11 . 4 . Les équations de Maxwell, débarbouillées par Einstein en 1921.

La confusion "*tout-est-vecteur*", avait fait permuter divergence et rotationnel sur les tourneurs déguisés en vecteurs. Les deux divergences reprennent leur vraie place, liées à la conservation de la charge électrique.

$\overrightarrow{\mathbf{Div}}\ \overset{\lrcorner}{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}} \quad \left(= \frac{\partial \mathbf{B}^{\mu\lambda}}{\partial x^{\lambda}} \vec{e}_{\mu}\right)$ **[M.L^{-1}.T^{-1}.Q^{-1}]** (Egalité vectorielle).

$\mathrm{div}\ \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ **[M.T^{-2}.Q^{-1}]** (Egalité scalaire).

$\frac{\partial \mathbf{B}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0$ **[M.L^{-1}.T^{-1}.Q^{-1}]** (Rotationnel du rotationnel $\overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}$, nul)

$\overset{\lrcorner}{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \overset{\lrcorner}{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$ **[M.T^{-2}.Q^{-1}]** (Somme tornatorielle nulle).

Enfin propres, enfin rationnelles envers les quatre dimensions d'espace et de temps, ces équations sont clairement les projections des deux équations quadridimensionnelles. Elles n'incitent plus à inventer de mythiques *monopôles magnétiques*, pour justifier la faute mathématique originelle.

12 . Prochaines actions, et moralité.

Nous examinerons plus tard les carences méthodologiques, et les mécanismes sociaux, qui ont pu verrouiller une aussi grosse bévue pendant 150 ans, et qui ont pu en faire le bizutage d'entrée dans la profession de physicien. Toujours, les moyens mathématiques **acceptés**, furent nettement en retard sur les besoins.

Les physiciens n'ont pas lu les outils établis par Hermann Grassmann[31] en 1844 et 1862. Côté mathématiciens, W.R. Hamilton a calembourdé leur auteur, et s'est contenté de vérifier que Grassmann n'antériorisait pas ses quaternions, sans rien voir d'autre. Clifford n'a découvert l'Ausdehnungslehre qu'un an avant sa mort, et celle de Maxwell[32]; et sa lecture n'est pas celle d'un physicien. Le cadre ensembliste indispensable n'a été apporté qu'en 1888 par G. Peano (1838-1932)[33]. Les moyens tensoriels publiés en 1888, n'ont été diffusés avec d'amples exemples d'applications qu'en 1901, à la demande de Felix Klein (1849-1925), par Ricci-Curbastro (1853-1925) et T. Levi-Civita (1873-1941)[34], dans l'indifférence générale des physiciens[35]. Qui les connaîtrait, si entre 1912 et 1914, Marcel Grossmann (1878-1936) n'avait pris la peine de les enseigner à un certain Albert Einstein (qui en fit quelque usage retentissant) ? Du reste, il semble qu'on ait systématiquement sous-estimé le rôle clarificateur des mathématiciens italiens des 19e et 20e siècles : par exemple, G. Bellavitis (1803-1880) a dès 1832, donné une définition claire de l'équipollence des vecteurs[36].

Même durant les années 60-70, de nombreux exposés de la Relativité restreinte, restaient incapables de distinguer si l'espace-temps de Minkowski (1864-1909), était un vrai espace de dimension 4 réelle, pseudo-euclidien, ou un espace de dimension 3 réelle, tiers-complexifié par une dimension temps imaginaire. Le concept de complexifié d'un espace n'était absolument pas dégagé. Or seul un espace de Minkowski de dimension 4 réelle, est complexifiable à la dimension 8, pour y loger les antécédents des spineurs. Mais ces professeurs-là n'y avaient nullement pensé, étant trop peu cultivés en électrodynamique quantique.

---

[31] H. G. Grassmann; *Die Lineale Ausdehnungslehre.* 1ère édition en 1844, édition refondue en 1862. Traduction fse par D. Flament: *La science de la grandeur extensive.* Lib. A. Blanchard. 1994 Paris.

[32] W. K. Clifford; *Applications of Grassmanns's extensive Algebra*. Amer. Journal of Math. 1878

[33] Giuseppe Peano; *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di Grassmann*. Turin 1888.

[34] G. Ricci & T. Levi-Civita; *Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications*. Math. Ann. 54 (1901) 125-201.

[35] Excepté probablement Woldemar Voigt (1850-1919), inventeur du mot "tenseur"; *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, Leipzig 1910.

[36] Giusto Bellavitis; *Exposition de la méthode des équipollences*. Laisant 1832. Gauthier-Villars, Paris 1874.

Aujourd'hui, il s'agit de restituer à la physique les outils mathématiques transparents qu'elle n'aurait pas dû rater pendant 150 ans. Le prochain article donnera les "travaux dirigés", permettant à chacun d'être au clair dans sa pratique calculatoire. Un autre rassemblera les expériences fondamentales à présenter aux élèves, au lieu de recommencer à les abuser avec les spectres de limailles de Faraday.

Au 16e siècle, Ambroise Paré écrivait : “*Il ne faut pas couper les couillons aux garçons !*” En ce temps-là, des châtreurs faisaient croire aux mères, qu'en châtrant leurs fils, ils les préserveraient à vie de toutes sortes de maladies mortelles... En notre temps, j'écris : “il ne faut plus enseigner le produit *vectoriel*.” Le contribuable nous confie ses enfants pour en faire d'honnêtes physiciens, pas pour les assotter à coups de contes de fées et de sornettes.

Maria Montessori a osé expérimenter, ce qui l'a conduit à inventer l'école maternelle moderne. Osez vous aussi la démarche qualité : donnez à vos élèves les moyens de pratiquer les deux présentations, pratiquez notamment les moyens graphiques plans. Et le tri se fera tout seul...

Index maths-sciences

Article précédent en html

Article suivant en html

Article précédent (en pdf)

Article suivant (en pdf)