Lemmes pour l'algèbre des tourneurs.

1 Définitions, notations.

Rang d'une matrice.

Le rang d'une matrice (ou d'un tableau) est l'ordre maximum de déterminant non nul extrait de cette matrice.

Valences de variance.

Définition : Sur un espace vectoriel E, de dimension n, on définit une matrice $n \times n$ de changement de base, comme celle qui exprime la nouvelle base B' dans l'ancienne base B : B' = T.B.

Définition : Dans un espace vectoriel, un tenseur est un **être géométrique présentant un caractère de réalité**, donc doué d'une permanence, malgré toutes les différentes façons de le regarder et de l'exprimer.

Définition : Une suite de coordonnées est tensorielle, autrement dit est le **descripteur d'un tenseur** p fois covariant, m fois contravariant, si et seulement si, lors d'un changement de coordonnées, elle se transforme par **p** multiplications (à droite) par la matrice de changement de base, et **m** multiplications (à gauche) par la matrice inverse. Ceci lui donne compétence pour décrire les **grandeurs tensorielles**, êtres géométriques classables selon leur dépendance à l'orientation dans l'espace vectoriel.[1]
On nomme alors l'entier p, la **valence covariante**, m la **valence contravariante**, et m-p la valence totale. Béklémichev[2] utilise la notation concise : tenseurs de type (m,p). Les vecteurs sont donc de type (1,0), et les covecteurs de type (0,1). Nous compterons donc les tourneurs stricts comme du type (1,1), et les tourneurs

[1] L'habitude est incorrecte, d'appeler "*tenseur*", la suite de coordonnées qui exprime un tenseur, relativement à une base.
[2] D. Béklémichev; *Cours de géométrie analytique et d'algèbre linéaire.* Editions Mir. Moscou. 1984.

étendus comme du type (2,0), les cotourneurs étendus en type (0,2). R. Penrose et W. Rindler[3] proposent une notation encore plus logique pour la valence : $\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix}$.

Notations renforçant le contrôle de type :

Comme il est peu pratique de multiplier les généralisations de la flèche, qui surmonte les lettres désignant des vecteurs, mieux vaut envisager une notation qui intègre le type de variance :

Pour un tourneur strict : $\overset{1;1}{B}$. Pour un tourneur étendu : $\overset{2;0}{\Phi}$. Pour une capacité, comme un volume : $\overset{3;0}{V}$.

Pour une masse volumique : $\overset{0;3}{\rho}$, etc. ou $\Phi\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\rho\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ce garde-fou complète le monôme dimensionnel (déjà maîtrisé au 17e siècle par l'abbé Marin Mersenne).

Livret de famille des tenseurs sur un espace vectoriel :

Echelon 0	Echelon 1	Echelon 2	Echelon 3	Echelon 4	
				tenseur (4,0)	
			tenseur (3,0)	tenseur (3,1)	
		tenseur (2,0)	tenseur (2,1)	tenseur (2,2)	Etc...
(0,0): scalaire	(1,0): vecteur	tenseur (1,1)	tenseur (1,2)	tenseur (1,3)	
	(0,1): covecteur	tenseur (0,2)	tenseur (0,3)	tenseur (0,4)	
1 seule coordonnée	n coordonnées	n^2 coordonnées	n^3 coordonnées	n^4 coordonnées	

Symétrie, antisymétrie.

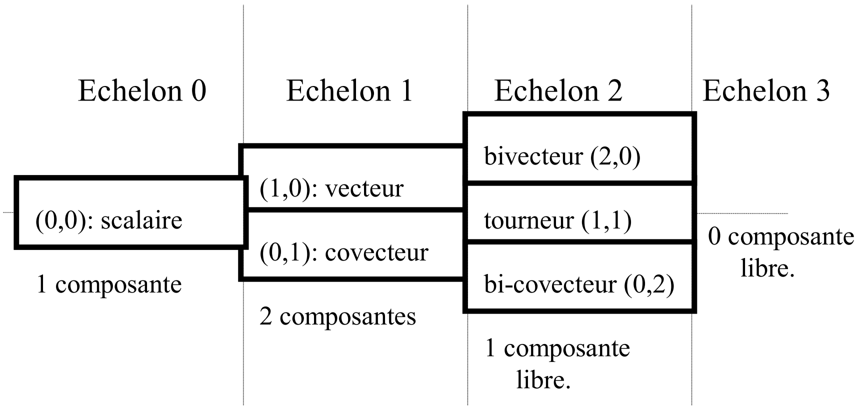
Symétrie d'une expression matricielle ou tensorielle : Aucune coordonnée ne change de valeur quand on permute deux indices : $B_{ij} = B_{ji}$. S'il y a plus de deux indices, on distinguera entre une symétrie sur certaines paires définies d'indices, et une symétrie totale, pour toutes les permutations possibles.

Antisymétrie d'une expression matricielle ou tensorielle : chaque coordonnée change de signe, en gardant sa valeur absolue, quand on permute deux indices $B_{ij} = - B_{ji}$. S'il y a plus de deux indices, on distinguera entre une antisymétrie sur certaines paires définies d'indices, et une antisymétrie totale, pour toutes les permutations possibles.

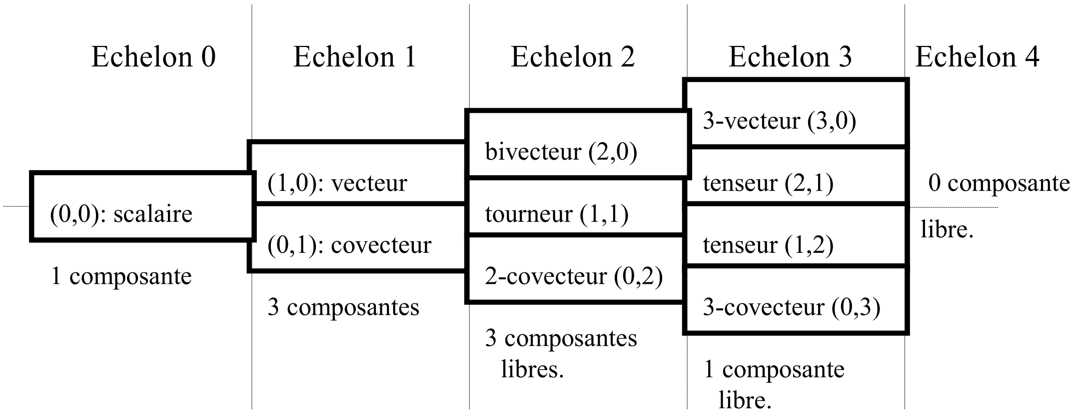
Livret de famille des multivecteurs sur un espace vectoriel :

Les multivecteurs sont les tenseurs complètement antisymétriques.
Les multivecteurs non nuls en dimension 2 :

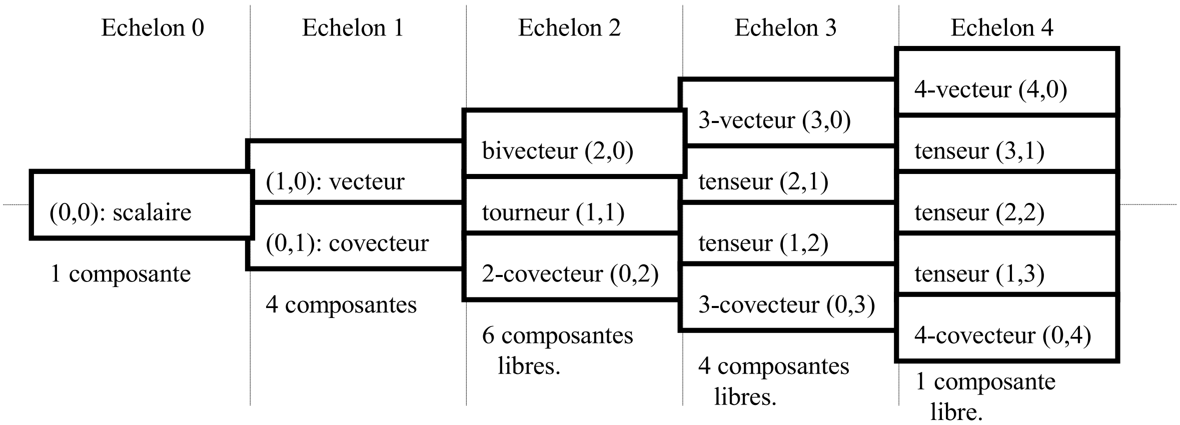
[3] R. Penrose, W. Rindler. *Spinors and space-time*. Vol. 1: *Two-spinor calculus and relativistic fields*. Cambridge 1984.



Les multivecteurs non nuls en dimension 3 :



Les multivecteurs non nuls en dimension 4 :



Dans le nombre de composantes strictes libres, on reconnaît le triangle de Pascal (coefficients du binôme) :
1; 2; 1.
1; 3; 3; 1.
1; 4; 6; 4; 1. Etc.

Le rang d'un p-vecteur non nul, sur un espace de dimension n, avec $p \leq n$, est toujours p.

Piège de langage : on a souvent dénommé "quadrivecteur" un vecteur tout à fait ordinaire, mais dans l'espace quadridimensionel de Minkowski (car dans l'esprit du physicien de base, "vecteur", ça voulait dire trois : trois composantes). Par 4-vecteur, nous désignons un produit extérieur de 4 vecteurs.

2 Rappels de métrique.

Pour ne pas réinventer la roue, nous emprunterons au savoir-faire des cristallographes, qui utilisent fructueusement le calcul tensoriel. Chez eux, "indice", signifie coordonnée.

On s'intéressera rarement à un plan précis (passant par exemple par un point donné), et souvent à la direction de plan, autrement dit, à la **classe d'équivalence des plans parallèles**.

Il serait souhaitable de distinguer par le vocabulaire, sans longue périphrase, mais la tradition a oublié de le faire. On pourrait suggérer ***équiplan***; de même ***équidroite*** pour la **classe d'équivalence des droites parallèles**. Il se poserait un problème pour la classe d'équivalence des droites orientées, axes, car *équiaxe* fait collision avec un terme de symétrie en physique et en mécanique des solides. Sous cette convention, on remarque qu'en cristallographie, "plan" signifie le plus souvent équiplan, et "droite" signifie le plus souvent équidroite.

2.1 Généralités sur l'équation d'un plan.

En cristallographie, on introduit les indices de plan, à partir des positions des noeuds, intersection du plan cristallographique, avec les trois axes de coordonnées. Le plan coupe les axes en des points d'indices (entiers, ou infinis) [h,0,0], [0,k,0] et [0,0,l]. On utilise les crochets [ ] pour les indices de droites, ou de vecteurs.

Les entiers h, k, l, appartiennent à $\mathbf{Z}^* \cup \{\infty\}$ (infini inclus, zéro exclu). Soit M le plus petit commun multiple de ceux de ces entiers qui sont finis. On forme alors les indices de plan H, K, L $\in \mathbf{Z}$:

$H = M/h$ (donc $hH = M$)
$K = M/k$ (donc $kK = M$)
$L = M/l$ (donc $lL = M$)

Par construction, ils sont premiers entre eux. On écrit ces **indices de Miller** de plan : (H, K, L).
Les séparateurs entre indices, virgules ou points, sont souvent omis, et remplacés par un simple blanc, car les indices cristallographiques supérieurs à 9 sont rarement considérés.

Ceci est bien cohérent avec l'équation du plan : $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = 1$
que l'on peut aussi écrire avec les indices covariants, de Miller : $Hx + Ky + Lz = M$.

Tout plan se caractérise dans un repère, par son équation : $Hx + Ky + Lz = M$. En cristallographie, les coordonnées covariantes de la direction de plan H, K, L, sont des entiers relatifs (généralement premiers entre eux), et sont nommées les indices de Miller du plan.

Dans le cas général, on considère le covecteur (type (0,1)) de coordonnées covariantes (p; q; r), qui représente le plan, par l'équation : $px + qy + rz = M$. On peut choisir M = 1 dans de nombreux cas, notamment si l'on veut définir un covecteur comme "inverse" d'un vecteur. Sous cette définition, le covecteur est un bon modèle mathématique d'un plan.

Mais si l'on ne s'intéresse qu'à la direction de plan, M n'a aucune importance, et on peut le prendre nul. Le covecteur n'est alors défini qu'à une constante multiplicative près, et au signe près. Le covecteur contient plus d'informations que nécessaire pour décrire l'équiplan.

On n'accède aux relations métriques avec les vecteurs hors de ce plan que par le tenseur métrique. Ce n'est que dans le cas particulier d'un repère orthonormal, qu'un vecteur de coordonnées (contravariantes) [p, q, r], est perpendiculaire au plan de coordonnées covariantes (p, q, r).

2.2 Tenseur métrique d'un réseau (d'une base euclidienne en général)

Par définition, ses composantes se définissent à partir des vecteurs de base B, et de leurs angles. Nous les exprimons par leurs coordonnées dans l'espace $E \times E$, où chaque E est rapporté à ladite base B :
$g_{ij} = |e_i|\,|e_j| \cos(e_i, e_j)$. **g**, car il a d'abord été connu comme "matrice de Gram".
Il est deux fois covariant, c'est à dire varie comme le carré de vecteurs du même genre que les vecteurs de base.
Dimension : si les vecteurs de la base sont homogènes et en mètres, le tenseur métrique est en mètres carrés.

En détail, si l'on a défini a, b, et c comme les modules des vecteurs de la base $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, et les angles : $\alpha = (\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = (\vec{c}, \vec{a})$, $\gamma = (\vec{a}, \vec{b})$, alors $g_{B\times B} = \begin{pmatrix} a^2 & ab\ \cos\gamma & ca\ \cos\beta \\ ab\ \cos\gamma & b^2 & bc\ \cos\alpha \\ ca\ \cos\beta & bc\ \cos\alpha & c^2 \end{pmatrix}$.

D'où les relations inverses : $a = \sqrt{g_{11}}$, et similaires,

$\alpha = \arccos\dfrac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}$, et similaires par permutations circulaires.

Volume de la maille élémentaire :

$\sqrt{\text{dét}(g)} = abc\,\omega$, avec $\omega = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}$

2.3 Expression du produit scalaire.

Soient les vecteurs [u,v,t] et [d,e,f], que nous réécrivons sous forme tensorielle u^i et v^j.

[u,v,t] . [d,e,f] = $g_{ij}u^i v^j$

2.4 Longueur, ou module, d'un vecteur.

Soit ce vecteur [u,v,t], que nous réécrivons sous forme tensorielle u^i.

[u,v,t] . [u,v,t] = $g_{ij}u^i u^j$

Il faut en prendre la racine carrée, pour obtenir la longueur, généralisée en module.

Application : longueur du vecteur [111] en réseau cubique, de paramètre a : $\sqrt{3}$ a.

En effet, le tenseur métrique d'un réseau cubique, se réduit à a^2 fois le tenseur unité.

2.5 Tenseur métrique réciproque.

On peut définir le tenseur métrique deux fois contravariant, comme inverse du précédent : $\mathbf{g_{ij} . g^{ij} = 1}$

Dimension : si les vecteurs de la base sont homogènes et en mètres, le tenseur métrique est en m^{-2}.

(On peut éventuellement définir la métrique du réseau réciproque un peu différemment, à une constante multiplicative près, pour la faire coïncider avec celle des vecteurs d'onde dans ce même cristal).

Les cristallographes préfèrent considérer ce tenseur 2-contravariant, comme le tenseur fondamental d'un ***réseau réciproque*** (synonyme de **dual**, au sens des algébristes, depuis Cayley). Les vecteurs de base du réseau réciproque sont normaux aux plans {100}. Dans le réseau réciproque, les vecteurs correspondent aux normales aux plans du réseau réel. Les longueurs de ces vecteurs, sont les inverses des distances réticulaires entre les plans et l'origine. D'où l'expression du produit scalaire de deux covecteurs représentant des plans d'indices (H,K,L) et (N,P,Q), les indices de plans, covariants, étant notés tensoriellement u_i et v_j :

$$U.V = g^{ij}u_i v_j$$

Explicitement : $a^* = \dfrac{\sin\alpha}{a\omega}$, et ses permutations circulaires,

$\cos\alpha^* = \dfrac{\cos\beta.\cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\beta.\sin\gamma}$, et ses permutations circulaires.

Dans un réseau cubique, le tenseur métrique réciproque se réduit au tenseur unité, divisé par a^2.

2.6 Application : module ("co-longueur") de covecteurs.

Soit le covecteur (H,K,L), que nous réécrivons sous forme tensorielle u_i. (H,K,L) . (H,K,L) = $g^{ij}u_i u_j$

Sous réserve que la condition (H, K et L premiers entre eux) ait été respectée, ce résultat est exactement le carré de l'inverse de l'équidistance entre plans de direction (H,K,L). Résultat dont nous avons besoin pour l'application de la loi de Bragg en radiocristallographie.

(H,K,L) . (H,K,L) = $g^{ij}u_i u_j = \dfrac{1}{d^2}$,

où d est l'équidistance de plans parallèles, observable en diffraction X ou électronique.

2.7 Angle de droites.

Il se déduit immédiatement du produit scalaire de vecteurs représentant des directions, et des modules de ces vecteurs. On en déduit le cosinus de l'angle entre ces directions :

$\sqrt{g_{ij}\, u^i\, u^j}\sqrt{g_{kl}\, v^k\, v^l}$ .cos([u,v,t] , [d,e,f]) = $g_{ij} u^i v^j$

2.8 Angle de plans.

Il se déduit du produit scalaire de covecteurs représentant des plans, et des modules de ces covecteurs :
On en déduit le cosinus de l'angle entre ces deux plans de coordonnées (H,K,L) et (N,P,Q) :

$\sqrt{g^{ij}\, u_i\, u_j}\sqrt{g^{kl} v_k\, v_l}$ .cos((H,K,L) ; (N,P,Q)) = $g^{ij} u_i v_j$

Les cristallographes interprètent cet angle dièdre comme l'angle de leurs normales, autrement dit, comme angle de vecteurs du réseau réciproque.

2.9 Parallélisme et inclusion de droites dans un plan

Par construction du plan (H,K,L), la droite qui passe par les noeuds [h,0,0] et [0,k,0], est évidemment contenue dans le plan (H,K,L).
Ses indices (coordonnées contravariantes) : [-h,k,0], ou équivalent [h,-k,0].
Par permutation circulaire, on peut en dire autant des droites [0,k,-l] et [-h,0,l]. Toutes les droites dont les indices sont combinaisons linéaires de deux quelconques de ces trois triplets, sont aussi incluses dans ce plan.
Il n'y a besoin d'aucune hypothèse métrique, pour constater la condition de parallélisme droite-plan :
[-h,k,0].(H,K,L) = hH - kK = M - M = 0
C'est bien un produit scalaire entre coordonnées naturelles d'un covecteur (covariantes), et coordonnées naturelles d'un vecteur (contravariantes), qui peut donc s'exprimer sans le truchement du tenseur métrique.
On peut poursuivre la vérification pour toutes les combinaisons linéaires :
(α [-h,k,0] + β [0,-k,l] + γ [h,0,-l]).(H,K,L) = α (-hH+kK) + β (-kK+lL) + γ (hH-lL) = 0, pour tout α , β et γ réels.
Le résultat est général : **[u,v,t].(H,K,L) = 0 <==> [u,v,t] // (H,K,L)**.

2.10 Angle de droite et plan.

On sait que quand l'angle est nul : [u,v,t].(H,K,L) = 0 <==> [u,v,t] // (H,K,L)

Expression complète : on n'a besoin du tenseur métrique que pour les longueurs des vecteurs. On prend le plan de coordonnées (H,K,L), et la droite de coordonnées [d,e,f], notés tensoriellement : u_n , et v^n .

$\sqrt{g_{ij}\, u^i\, u^j}\sqrt{g^{st} v_s\, v_t}$ .sin((H,K,L) , [d,e,f]) = $u_n v^n$

Car le tenseur métrique en coordonnées mixtes, se réduit au symbole de Kronecker.

2.11 Direction d'arête intersection de deux plans.

Etant donnés deux plans de coordonnées (H,K,L) et (N,P,Q), leur arête de coordonnées [u,v,t] répond aux deux équations : [u,v,t].(H,K,L) = 0
[u,v,t].(N,P,Q) = 0
Pour vérifier que ces deux plans ne sont pas parallèles, formons le **produit extérieur** de leurs coordonnées :

$$\Delta = (H,K,L) \wedge (N,P,Q) = \begin{pmatrix} 0 & HP - KN & HQ - LN \\ KN - HP & 0 & KQ - LP \\ LN - HQ & LP - KQ & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Si les coordonnées de Δ ne sont pas toutes nulles, le problème n'a qu'une seule direction solution. Cette solution vérifie alors l'équation : Δ . [u,v,t] = 0
Si parmi les coordonnées strictes de Δ , seul HP-KN n'est pas nul, on voit qu'obligatoirement u = v = 0. Ce qui donne l'arête [0,0,1].
Ceci nous incite à proposer une solution pour la coordonnée t :

$t = \alpha$ (HP - KN). Il ne nous reste alors plus de choix, il vient immédiatement :
$u = \alpha$ (KQ - PL)
$v = \alpha$ (LN - HQ)

Réécrivons Δ selon cette solution : $\alpha\Delta = \begin{pmatrix} 0 & t & -v \\ -t & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{pmatrix}$.

Pour obtenir la contravariance, prendre α = V, volume de la maille de base.

2.12 Définition d'une direction de plan par deux vecteurs non colinéaires.

Soient [u,v,t] et [d,e,f] les coordonnées de ces vecteurs. On a à résoudre un système de deux équations :
[u,w,t].(H,K,L) = 0
[d,e,f].(H,K,L) = 0
On forme le produit extérieur de ces vecteurs, et on obtient une solution 2-contravariante :
H' = wf - et, K' = td - fu, L' = ue - dw

$$[u,w,t] \wedge [d,e,f] = \begin{pmatrix} 0 & ue - wd & uf - td \\ wd - ue & 0 & wf - te \\ td - uf & te - wf & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on prend la matrice 3×2 : $\begin{pmatrix} u & w & t \\ d & e & f \end{pmatrix}$, et on calcule ses trois mineurs : $\begin{vmatrix} w & t \\ e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t & u \\ f & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u & w \\ d & e \end{vmatrix}$

.

Il reste alors à convertir ou utiliser notre résultat de type (2, 0), qui pour l'instant, ne représente que les coordonnées strictes d'un bivecteur, ou tourneur étendu. Pour obtenir une expression covariante, il faut diviser par une quantité 3-contravariante, typiquement le volume du parallélépipède défini par les (3) vecteurs de la base courante : $V = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Autrement dit, le déterminant des coordonnées de e_1, e_2, e_3. D'où les coordonnées d'équiplan (de direction de plan) covariantes :
H = (wf - et)/V. K = (td - fu)/V. L = (ue - dv)/V.

2.13 Vraies et fausses équivalences.

On a vu qu'une direction de plan, autrement dit un équiplan, peut être défini aussi bien par un covecteur, que par un tourneur. En effet, l'équiplan contient MOINS d'informations que le covecteur, ou que le tourneur.

Mais le tourneur n'est en aucune façon équivalent au covecteur : ils contiennent des informations différentes, **impossibles à connecter de façon intrinsèque**.

Le covecteur (p, q, r) représente naturellement un vrai plan. Ce plan est le noyau de l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}$: [x,y,z] -----> (p,q,r).[x,y,z] - 1. Ceci définit où est ce plan, par rapport à l'origine du repère [4].

Un tourneur strict unitaire représente une projection dans un plan, et un quart de tour dans ce plan.

Un tourneur étendu représente une aire dans un équiplan, orientée par le sens de parcours de son périmètre, dans une direction de plan. Il ne dit rien de l'emplacement de cette aire, ni de son éventuelle forme.
Mais pour oser affirmer aux étudiants, ainsi que le font certains physiciens, que le tourneur étendu, et le covecteur, c'est kif-kif, ou "*dual*", il faut sacrément se dispenser de l'épreuve de réalité abstraite - mathématicienne, et de l'épreuve de réalité concrète - physicienne. Dans les deux paragraphes précédents, nous avons calculé les coordonnées de l'un depuis l'autre, mais **à une constante multiplicative arbitraire près**, irrémédiablement arbitraire, irrémédiablement dépourvue de signification physique. Nous ne cherchions **que** la direction de plan.

---

[4] En analyse des contraintes, le tenseur des contraintes usuel viole les règles de variance: on y repère un élément de surface par un seul indice, au lieu de deux. C'est que cette surface est représentée par un covecteur, multiplié par un volume **non orienté**. Cette convention discutable est très ancrée dans les habitudes. Nous y reviendrons.

3 Tourneurs unitaires. Approche sur bases orthonormales.

Se reporter si nécessaire à l'annexe algébrique : matrices qui commutent; matrices qui anticommutent.
Nous nous limiterons dans ce chapitre, aux dimensions 2 et 3. Les applications et extensions en dimension 2 complexifiée, et en dimension 4 réelle ou complexifiée, sont toutes reportées deux chapitres plus loin.

3.1 Génération en dimension 2.

En dimension deux, on en sait les deux seules formes possibles : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ = J, et son opposé $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ = -J.

On sait depuis Hamilton, que cette matrice réalise le nombre imaginaire i (ou j en électricité).

Ce tourneur J est invariant dans toute rotation du plan, de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, dont il est justement l'opérateur infinitésimal. J et -J ont le même déterminant, de valeur +1.

On connaît la formulation classique, pour toute matrice de rotation : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp(\theta\ J)$.

Explicitons les valeurs propres et les directions propres ("vecteurs-propres", ou plus correctement, vectoroïdes propres[5]) de la matrice J :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ou} \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ +1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x - y \\ x - \lambda y \end{pmatrix} = 0.$$

Le polynôme ($\lambda^2 + 1$) est le polynôme caractéristique de cette application linéaire.
Ses racines sont dans le domaine complexe : $\lambda = i$, d'où x = i, y = 1, et $\lambda = -i$, d'où x = 1, y = i. Les vectoroïdes-propres, dans l'espace $\mathbb{C}^2$, sont de module nul, et sont classiquement appelés "vecteurs isotropes".

Dans la base propre (du complexifié), $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, J prend donc la forme diagonale : $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, et le tenseur métrique (carré hermitien de la matrice de changement de base, multiplié par l'unité d'aire) est inchangé : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quant à la matrice de rotation **exp(θ J)**, de polynôme caractéristique ($\lambda^2 + 1 - 2\lambda\cos\theta$), ses valeurs propres sont $\lambda = \cos\theta \pm i.\sin\theta$, et elle a les mêmes vectoroïdes-propres : x = i, y = 1, et son conjugué (sauf cas où θ est nul, alors tout vectoroïde réel est vectoroïde-propre).
Ses invariants classiques : trace = $J^i_i = 2\cos\theta$, déterminant = $J^1_1 . J^2_2 - J^2_1 . J^1_2 = 1$.

En dimension 2, il n'y a pas à distinguer le tourneur, de la rotation d'un quart de tour.

Remarque. Il est intéressant de comparer les rotations avec les symétries laissant une droite invariante.

Matrice de symétrie autour d'une droite d'indices [$\cos\theta$; $\sin\theta$] : $S = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique : ($1-\lambda^2$), de racines opposées +1 et -1. $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Invariant d'ordre 1 (trace) = 0, Invariant d'ordre 2 (déterminant) = -1.
Depuis Olinde Rodrigues, et E. Cartan[6], il est classique de remarquer que toute rotation d'angle $\alpha = \theta - \eta$ est aussi le produit de deux symétries, dont les droites invariantes font entre elles un angle de $\alpha/2$:

$$\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\eta & \sin\eta \\ \sin\eta & -\cos\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\eta) & -\sin(\theta-\eta) \\ \sin(\theta-\eta) & \cos(\theta-\eta) \end{pmatrix} . \ \alpha$$

[5] Les techniques matricielles sont appliquables à tout espace vectoriel général. Les directions propres contiennent donc des vectoroïdes propres. Ici tous nos exemples sont pris dans l'espace euclidien ordinaire, et nos cibles sont le plus souvent de vrais vecteurs, ou de vrais covecteurs.
[6] E. Cartan. *The Theory of Spinors*. Dover 1981, Hermann 1977. Paris 1937.

Soit une symétrie autour de la droite d'indices [cos(η/2); sin(η/2)], **suivie** d'une symétrie autour de la droite [cos(θ /2); sin(θ /2)].

En particulier pour la rotation d'un quart de tour : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) & \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) & -\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Avec le choix $\theta = 0$, on obtient **deux matrices de réflexion de Pauli** : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Multiplions ce résultat par i, et l'on obtient la seconde matrice de Pauli : $i . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2$.

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de réflexion autour de la droite d'indices [1; 1].

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, autour de la droite d'indices [1; 0] ; et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de réflexion autour d'une droite isotrope, d'indices [1; i].

3.2 Génération en dimension 3.

En dimension trois, et plus, un tourneur unitaire est décomposable en une projection sur le plan stable, suivie ou précédée, d'une rotation d'un quart de tour dans le même plan stable. Il est remarquable que ces opérations commutent. Le groupe de ces rotations en dimension 3, est usuellement appelé SO(3).

3.2.1 Les matrices de projections de base.

Limitons-nous provisoirement aux projection intérieures sur les équiplans de base :

En repère orthonormé : $P_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $P_{zx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $P_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique de P_{xy} : $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\ (1-\lambda)^2$, de racines 0, et 1 (double). Ce sont les valeurs propres de cette matrice. L'équiplan invariant a pour covecteur directeur (0,0,1). L'équidroite noyau (préimage de zéro), a un vecteur directeur d'indices [0,0,1].

En toute base, tout projecteur intérieur sur un équiplan a pour polynôme caractéristique : $\lambda\ (1-\lambda)^2$. Tout projecteur est idempotent : $P^2 = P$. Et sauf s'il s'agit de la projection triviale, l'identité, sa matrice n'est pas inversible.

3.2.2 Les matrices de rotations de base

$R_{xy}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $R_{zx}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$. $R_{yz}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Connaissons mieux cette rotation, de matrice $R_{xy}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Son équation caractéristique, dont les racines sont valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (2\cos\theta + 1)\lambda^2 - (2\cos\theta + 1)\lambda + 1 = (1-\lambda).(\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1).$$

Les invariants d'une matrice carrée, et par extension d'un tenseur de valence nette nulle, sont les coefficients de son équation caractéristique, multipliés par $(-1)^{\text{degré de } \lambda}$.
Ordre d'un invariant : le degré des produits de coefficients, dont il est la somme homogène.
La somme : (ordre de l'invariant) + (degré du terme en λ) = dimension de la matrice carrée.
Les trois invariants de la matrice de rotation (pas d'invariant d'ordre nul) :
Invariant d'ordre 1 (trace) = $2\cos\theta + 1$, Invariant d'ordre 3 (déterminant) = 1.
Invariant d'ordre 2 (somme des mineurs diagonaux) : $\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = 2\cos\theta + 1$.

Remarque. Propriété caractéristique des matrices de rotation de $\mathbf{R}^3$: leurs 1er et 2e invariants sont égaux. Cela les oppose aux symétries par rapport à un plan (anti-déplacements).

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2.(1+\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 .$$

Invariant d'ordre 1 (trace) = 1, Invariant d'ordre 3 (déterminant) = -1.
Invariant d'ordre 2 = $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$.

Toute rotation d'angle $\alpha = \theta - \eta$ est aussi le produit de deux symétries, dont les plans invariants font entre eux un angle de $\alpha/2$: $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\eta & \sin\eta & 0 \\ \sin\eta & -\cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\eta) & -\sin(\theta-\eta) & 0 \\ \sin(\theta-\eta) & \cos(\theta-\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Valeurs propres, directions propres.
Les valeurs propres de la matrice de rotation $R_{xy}(\theta)$, sont $\lambda = 1$, et $\lambda = \cos\theta \pm i.\sin\theta$ ($e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$). Ses vectoroïdes-propres appartiennent à $\mathbf{C}^3$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dont le premier et le second sont isotropes.

Sauf si θ est nul, auquel cas tout vecteur (ou vectoroïde arbitraire) réel est vectoroïde-propre.

<u>Rappel</u> : la table de multiplication des quaternions :
où i, j et k représentent trois rotations d'angle droit, orthogonales entre elles, et où 1 représente la transformation identique : pas de rotation du tout.

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Les rotations sur $\mathbf{E}_3$ (espace affine à $\mathbf{R}^3$), sont isomorphes avec le groupe multiplicatif des quaternions unitaires, ce qui a mystifié tout le monde de 1843 jusque vers 1901. Pour raisons algébriques, certains préfèrent utiliser deux fois le quaternion d'angle moitié[7].

Remarque : Si θ est infinitésimal, les valeurs propres ne diffèrent que d'un infinitésimal :
$\lambda = 1$ et $\lambda = 1 \pm i d\theta$

[7] R. Saint-Guilhem; *Notions fondamentales de mathématiques modernes. T1.* Ellipses. Paris 1989.

Donc les trois matrices $R_{xy}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & -d\theta & 0 \\ d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $R_{zx}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -d\theta & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $R_{yz}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\theta \\ 0 & d\theta & 1 \end{pmatrix}$,

commutent, à l'infinitésimal du second ordre près $d^2\theta$. C'est ce qui justifie l'usage des tourneurs.

Attention ! Les matrices $R_{xy}(\pi/2)$, $R_{yz}(\pi/2)$ et $R_{zx}(\pi/2)$, munies de la multiplication matricielle simple, ne sont pas une réalisation de l'algèbre des quaternions. En effet, la transformation qui réalise l'algèbre des quaternions est différente, c'est le changement de base : $R_{xy}(\pi/2) . R_{yz}(\pi/2) . R_{xy}^{-1}(\pi/2) = R_{zx}(\pi/2)$.

3.2.3 Tourneurs : formes de base, dans les trois équiplans de base :

sur yOz : $J_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

sur zOx : $J_{zx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et sur xOy : $J_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De là, on obtient par combinaisons linéaires, le groupe additif des tourneurs. Pour le sous-ensemble des tourneurs unitaire, on l'obtient par les rotations et symétries à trois dimensions d'un tel tourneur pris dans un plan quelconque. Leurs matrices représentatives ont toutes les mêmes valeurs propres : 0, i et -i. Les vectoroïdes propres, dans un plan de l'espace $\mathbf{C}^3$, sont de modules euclidiens nuls, et sont qualifiés : vecteurs isotropes.

Le sous-espace orthogonal au plan stable, est noyau (préimage de zéro) de l'application J_{kl} : valeur propre nulle.

Leurs équiplans stables ont respectivement pour coordonnées covariantes : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Familiarisons-nous avec les combinaisons des tourneurs dans deux plans de base, sans le troisième.
Un tourneur est invariant par rotation dans son équiplan stable, ici xOy.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_{xy} = R_{xy}(-\theta) . J_{xy} . R_{xy}(\theta).$$

J_{xy} est l'opérateur infinitésimal de la rotation $R_{xy}(\theta)$: $J_{xy} = \dfrac{\partial R_{xy}(\theta)}{\partial \theta}$.

Il est classique de remarquer que cette matrice est une exponentielle de matrice : $R_{xy}(\theta) = \exp(\theta\ J_{xy})$.
On peut donc réécrire ce résultat : $\exp(-\theta\ J_{xy}) . J_{xy} . \exp(\theta\ J_{xy}) = J_{xy}$.

Quels sont les trois invariants d'une quelconque des matrices J_{kl}? trace nulle.

Second invariant égal à l'unité : $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 1$. Déterminant nul. Une matrice de tourneur est donc de rang 2.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \cos\theta\ . J_{xy} - \sin\theta\ . J_{yz}.$$

$\exp(-\theta\ J_{zx}) . J_{xy} . \exp(\theta\ J_{zx}) = \cos\theta\ . J_{xy} - \sin\theta\ . J_{yz}$.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \sin\theta \ . J_{xy} + \cos\theta \ . J_{yz}.$$

$\exp(-\theta\ J_{zx}) . J_{yz} . \exp(\theta\ J_{zx}) = \cos\theta\ . J_{yz} + \sin\theta\ . J_{xy}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos(\alpha+\theta) & \sin(\alpha+\theta) \\ \cos(\alpha+\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha+\theta) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Nous avons redécouvert la formule de Moivre !

Voici le cas général, auquel plusieurs autres formes sont équivalentes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha.\cos\theta & -\cos\alpha.\sin\theta \\ \cos\alpha.\cos\theta & 0 & \sin\alpha \\ \cos\alpha.\sin\theta & -\sin\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien le cas général : un tourneur sur $\mathbf{R}^3$ n'a que 3 composantes strictes.
Pour un tourneur unité, seuls deux paramètres, sont libres. Prenant les angles en coordonnées sphériques, avec β longitude, et α latitude, on peut toujours ramener ces composantes strictes à : $\sin\alpha$, $\cos\alpha.\cos\beta$, et $\cos\alpha.\sin\beta$.

Seul l'invariant d'ordre 2 est non nul : $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha.\cos\theta)^2 + (\cos\alpha.\sin\theta)^2 \equiv (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 \equiv 1$.
Trace nulle. Déterminant nul. Une matrice de tourneur est toujours de rang 2.

Diagonalisation : Tout comme les trois rotations de base, les trois tourneurs de base ne sont pas simultanément diagonalisables, sinon ils commuteraient entre eux.

J_{yz} prend la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ sur la base $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$. J_{zx} prend la forme : $\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ sur la base $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. J_{xy} prend la forme : $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur la base $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Il est évident que ces trois bases ne coïncident pas du tout. Il faut choisir le plan stable de diagonalisation.

Les matrices de tourneurs sur R^3 ne forment pas un groupe multiplicatif.

$-J_{yz}^2 = J_{yz}.(-J_{yz}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Pint}(J_{yz})$: projecteur sur le plan stable de J_{yz} : yOz.

D'où le développement en série de l'exponentielle, et : $\exp(\theta\ J_{yz}) = \mathrm{Pext}(J_{yz}) + \sin\theta\ .J_{yz} + \cos\theta\ .\mathrm{Pint}(J_{yz})$.
Et les relations similaires sur J_{zx} et J_{xy} donnent de même les projecteurs sur leurs plans stables.

$J_{yz}. J_{zx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\qquad J_{zx}. J_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$J_{yz}.\, J_{zx}\, . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad J_{zx}.\, J_{yz}\, . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Une projection sur un axe, et un quart de tour.

$$J_{zx}.\, J_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad J_{xy}.\, J_{zx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_{xy}.\, J_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad J_{yz}.\, J_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous exploiterons ces résultats, pour définir le produit biscalaire (contracté deux fois) de deux tourneurs.
Ce sont les conséquences d'un noyau de dimension 1 pour tout tourneur de $\mathbf{E}_3$ (espace affine à $\mathbf{R}^3$), autrement dit, qu'un tourneur résulte de la composition d'une rotation d'un quart de tour, et d'une projection plane.

On remarque les **commutateurs**, ou produits antisymétriques :

$$[J_{yz}, J_{zx}] = J_{yz} . J_{zx} - J_{zx} . J_{yz} = J_{xy}.$$
$$[J_{zx}, J_{xy}] = J_{zx} . J_{xy} - J_{xy} . J_{zx} = J_{yz}.$$
$$[J_{xy}, J_{yz}] = J_{xy} . J_{yz} - J_{yz} . J_{xy} = J_{zx}.$$

La possibilité de définir ces produits antisymétriques de tourneurs stricts, découle immédiatement de la composition des rotations. On ne l'a ici démontrée que pour le cas particulier des bases orthonormales.
On peut envisager d'écrire cela en *cross-product* : $J_{xy}.= J_{yz} \times J_{zx}$, et de le prononcer "produit tornatoriel". C'est le seul cas où un *cross-product* devient correct et cohérent : <u>strictement entre tourneurs</u>.
L'extension éventuelle aux tourneurs physiques, physiquement dimensionnés, exige de vérifier le respect des règles de covariance tensorielle, et de cohérence dimensionnelle.

3.2.4 Extensions du commutateur en mécanique quantique.

Représentation régulière des opérateurs de moment angulaire orbital[8], à la dimension physique près :

$$\hat{L}_1 \rightarrow i\, .\, J_{yz} = i\, . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_2 \rightarrow i\, .\, J_{zx} = i\, . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_3 \rightarrow i\, .\, J_{xy} = i\, . \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les commutateurs de ces opérateurs hermitiens abstraits réalisent une algèbre ressemblant à celle des matrices de Pauli : $[\hat{L}_1; \hat{L}_2] = -[J_{yz}, J_{zx}] = -J_{yz} . J_{zx} + J_{zx} . J_{yz} = -J_{xy} = i\, \hat{L}_3$.

4 Conclusion provisoire.

Dans la suite de l'article, consacrée à la métrique des tourneurs, nous établirons l'écriture la plus générale du module d'un tourneur; nous la vérifierons dans un exercice en base non orthonormale. Nous établirons le passage de l'expression d'un tourneur, à l'équation de son plan stable. Nous en déduirons la projection intérieure et la projection extérieure sur un tourneur. Nous en déduirons le produit biscalaire de deux tourneurs. C'est indispensable pour établir la densité volumique d'énergie magnétique, et notamment pour commencer d'établir la théorie des spectres de limailles de Faraday, qui exigent des champs inhomogènes. A expérience facile, interprétation et théorie nettement plus délicates. Nous terminerons par les extensions en dimension quatre, et notamment dans l'espace-temps de Minkowski.

Ainsi, nous aurons développé le calcul sur les êtres plans, tels que les tourneurs, et sur leurs relations avec les êtres vectoriels. Tous calculs géométriques nécessaires à la physique élémentaire. Cela dégage un chemin bien plus économique entre la physique élémentaire enseignable dans les lycées, et la vraie physique théorique.

[8] W. Greiner, B. Müller; *Quantum Mechanics Symmetries*. Springer, Berlin 1989.

Ici encore, nous avons recueilli les fruits du travail de désengorgement sémantique précédent. Jusqu'à présent, il était abusivement difficile de deviner à la lecture d'un physicien, laquelle au juste des acceptions admises, il voulait écrire, quand il écrivait une expression "*vectorielle*". Notamment, l'usage du monôme dimensionnel, et de l'analyse dimensionnelle, était terriblement handicapé par l'accrochage de la communauté des physiciens à des incorrections mathématiques, physiquement injustifiables. Accepter l'outil mathématique adéquat permet de grandes clarifications, qui ne font que commencer. Ce sera alors à vous de jouer.

5 Compléments : Lemmes algébriques.

5.1 Lemme 1 : les matrices qui commutent, AB = BA.

5.1.1 Remarque générale : les matrices carrées simultanément diagonalisables commutent. Autrement dit : les matrices doivent partager tous leurs "vecteurs-propres", ou plus correctement, **toutes leurs directions propres**, donc leurs sous-espaces stables.

5.1.2 Cas des matrices 2×2. Outre la matrice-unité, les matrices qui commutent forment des familles qui dépendent chacune de deux constantes fixes α et β, et ont la forme $\begin{pmatrix} a-\beta b & b/\alpha \\ \alpha b & a+\beta b \end{pmatrix}$. Avec le choix $\alpha = i$, et $\beta = 0$, on obtient la forme normalisée $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, bien connue comme réalisation du nombre complexe x + iy.

5.1.3 Pour comparer avec le cas des matrices anticommutantes, il est bon de regarder leurs valeurs propres et directions propres, pour chaque famille (α, β) :

Il est intéressant de changer de variable : $\beta = \text{sh}\ \theta$. ($\theta$ pouvant être complexe.)

Pour la valeur propre : $a + b.\ \text{ch}\ \theta$, direction propre: $y/x = \alpha\ .\ e^{\theta}$, qui est indépendante de a et b, et commune à toute la famille (α, β).

Pour la valeur propre : $a - b.\ \text{ch}\ \theta$, direction propre: $y/x = -\ \alpha\ .\ e^{-\theta}$, qui est indépendante de a et b.

5.1.4 Cas particulier : dégénérescence du spectre de valeurs propres. Si une valeur propre est multiple, alors toute combinaison linéaire des "vecteurs-propres" correspondants est encore propre, ce qui détermine un sous-espace propre. La restriction d'une matrice sur un sous-espace propre à une valeur propre multiple, commute avec la restriction à ce sous-espace, de toute matrice.

Par exemple, $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}$.

5.1.5 Ce résultat se maintenant en toute base, il en résulte qu'un projecteur intérieur, ou extérieur, sur un (équi)plan, commute avec toute rotation dans ce plan, et avec tout tourneur du même (équi)plan. De même toute matrice de rotation commute avec un tourneur du même équiplan stable.

5.2 Lemme 2 : les matrices qui anticommutent, AB = -BA.

5.2.1 Cas particulier des matrices 2×2.

N'anticommutent que des matrices de trace nulle, autrement dit des déviateurs, privés de tout caractère scalaire et isotrope. Pour toutes matrices carrées de trace nulle, et de dimension 2×2, A et B, on peut exprimer B comme la somme de deux matrices B_c et B_a, telles que B_c commute avec A, et B_a anticommute avec A :

$A.B_c = B_c.A$ $\qquad A.B_a + B_a.A = 0.$

En effet : $2A.B_c = 2B_c.A = A.B + B.A$ et $2A.B_a = -\ 2B_a.A = A.B - B.A$.

Dans le cas particulier des matrices 2×2, on trouve la totalité des solutions, en décidant que l'une des solutions **A** a été mise sous forme diagonalisée (on s'est placé dans un repère où elle est diagonale) :

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ anticommute avec toute matrice antidiagonale $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

Dans le cas favorable (mais nullement général) où cette base diagonalisant A est orthogonale, on reconnaît que A est le produit par **a** d'une matrice de réflexion autour de la droite d'indices [1; 0] ; et aussi le produit par **-a** d'une matrice de réflexion autour de la droite d'indices [0; 1].

Nous ne nous intéresserons pas aux solutions singulières : $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ qui sont nilpotentes.

Il est intéressant de se restreindre aux seules matrices régulières (inversibles), en adoptant la forme de B suivante : $\begin{pmatrix} 0 & b/\alpha \\ \alpha b & 0 \end{pmatrix}$. C'est le produit par **b** d'une matrice de réflexion non orthogonale : $\begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

La direction invariante (valeur propre 1) a pour indices (1 ; α), et la direction de réflexion (valeur propre -1), a pour indices (α ; -1). Toujours dans l'hypothèse favorable, non générale, mais guidant le regard, où la base diagonalisant A soit orthogonale, ces deux directions propres de B ont la particularité qu'elles admettent les directions propres de A comme bissectrices.

Le produit AB, est lui aussi antidiagonal, $\begin{pmatrix} 0 & ab/\alpha \\ -a\alpha b & 0 \end{pmatrix}$, et il anticommute avec les deux matrices A et B.

Les nombres **a**, **b**, **c** et **α** pouvant prendre toute valeur complexe, voire hypercomplexe. Ces matrices ont toutes en commun que leur trace est nulle, et que leur polynôme caractéristique n'admet que des racines opposées. Chacune anticommute avec toute combinaison linéaire des deux autres. Chacune a pour carré une matrice "scalaire" : $\begin{pmatrix} a & b/\alpha \\ \alpha b & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b/\alpha \\ \alpha b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, qui évidemment commute avec toute matrice.

Si l'on impose comme condition supplémentaire, afin d'avoir une base normalisée, de ne retenir que des matrices dont le carré soit l'unité, on exige que $a^2 + b^2 = 1$. Leurs valeurs propres sont alors 1 et -1.

Solutions possibles : $\begin{pmatrix} \cos\phi & \frac{\sin\phi}{\alpha} \\ \alpha.\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\vartheta & \frac{\mathrm{sh}\vartheta}{\alpha} \\ -\alpha.\mathrm{sh}\vartheta & -\mathrm{ch}\vartheta \end{pmatrix}$, etc.

Cas des **matrices de Pauli**, obtenues en faisant $\phi = \pi/2$, et respectivement $\alpha = 1$ et $\alpha = i$, puis $\phi = 0$.

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Voyons leurs directions propres :

$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces bases forment bien des angles de π/4 entre elles, soit le maximum possible.

Les produits des matrices de Pauli par l'imaginaire **-i**, forment une autre sorte de base normalisée; leurs carrés valent l'opposé de l'unité. Leurs valeurs propres sont **i** et **-i**. Ils forment donc une base de quaternions "purs", anticommutants:

$-i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $-i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $-i\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

5.2.2 Dès que les matrices carrées sont de dimension supérieure à 2 × 2, il n'existe plus de décomposition entre partie commutante et partie anticommutante, cela ne suffit plus. De plus, la condition de trace nulle, non seulement n'est plus suffisante pour les matrices de dimension paire (les valeur propres doivent être opposées deux à deux), mais est même irréalisable en dimension impaire.

Chercher la partie anticommutante de B revient à résoudre l'équation : $\mathbf{A^{-1}.B_a.A = -B_a}$.

Il faut distinguer trois domaines dans le spectre de A, donc trois catégories de sous-espaces :

1. Les valeurs propres nulles de A. La restriction de B_a dans le noyau de A, est quelconque.

2. Les valeurs propres non nulles de A, mais dégénérées. Pour chacune de ces valeurs, il existe un sous-espace propre de A, où la restriction de B_c est libre ; donc où la restriction de de B_a est nulle.
3. Les valeurs propres non nulles de A, non dégénérées. Dans une base où A est diagonale, la restriction de B_a a une diagonale nulle. Elle n'a aucun "vecteur-propre" commun avec A.

5.2.3 Dans le cas particulier des matrices 3×3, si l'une des valeurs propres est nulle, on retombe sur le cas précédent, pour le sous-espace conservatif : quotient de l'espace E_3 divisé par le noyau. Il n'existe aucune solution entièrement entre matrices régulières. Soient a, b et c trois valeurs propres distinctes, non 2 à 2 opposées ($a+b \neq 0$; $b+c \neq 0$; $c+a \neq 0$;) :

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ n'anticommute qu'avec $\begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant nul.

tandis que $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, n'anticommute qu'avec la matrice nulle.

Et $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ n'anticommute qu'avec $\begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ e & 0 & g \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$, elle aussi de déterminant nul.

Ce résultat est général aux matrices d'ordre impair : il n'existe de solutions que singulières, dont la projection sur le sous-espace conservatif, ramène à un cas pair étudié.

5.2.4 Dans le cas des matrices 4×4, et plus, $n \times n$, l'équation $\mathbf{A^{-1}.B_a.A = -B_a}$. se résout en n^2 équations du genre $\left(\frac{A_i^i}{A_j^j} + 1\right).B_j^i = 0$. Il n'y a de solutions avec B non singulière que si n est pair : **n = 2p**, et que si le polynôme caractéristique de A est $(\lambda^2 - 1)^p$. Les valeurs propres de A forment donc deux multiplicités de 1 et de -1. Ainsi, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, les anticommutantes sont de la forme : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & t \\ r & s & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais A commute avec B^2.

Des exemples particuliers ont été donnés dans cet article. Les matrices de Dirac sont un exemple fameux de ces matrices anticommutantes de dimension 4×4.

Retour à l'accueil Sciences

Article précédent (html) Article suivant (html)

Article précédent (pdf) Article suivant (pdf)